PROBLEMARIO DE FÍSICA

Carlos Juárez León

carl111_1@ipn.mx.

Departamento de Formación Básica, Escuela Superior de Cómputo del IPN, México D.F., México

20 de octubre de 2011

Contenido

INTRODUCCIÓN

En este trabajo presentamos una cuidadosa selección de problemas para la asignatura de Física de la carrera de ingeniería en Sistemas Computacionales de la Escuela Superior de Cómputo (ESCOM) del Instituto Politécnico Nacional (IPN), que en general abarca el estudio de la Mecánica y, electricidad y Magnetismo, disciplinas muy completas que describen la fenomenología que da lugar en la Naturaleza, el universo en el que vivimos, en el régimen clásico en cuanto a la Mecánica se refiere. Estas dos áreas de la Física son muy extensas, por lo que los problemas desarrollados ilustran la aplicación de las leyes que rigen estas disciplinas, dando además la motivación para que el estudiante comprenda el alcance de éstas.

Este trabajo está dirigido principalmente para los estudiantes de Física de esta carrera, sin embargo puede servir también de apoyo didáctico para los profesores encargados de esta asignatura.

Las leyes de estas áreas de la Física son modeladas matemáticamente, por lo que se requiere un conocimiento previo de álgebra elemental, geometría y Cálculo diferencial e integral, conocimiento que el estudiante debe tener de sus estudios del nivel medio superior.

La estructura de algunos de los problemas contiene los detalles algebraicos necesarios para que el estudiante siga perfectamente la solución del problema, sin embargo en algunos de ellos se omiten algunos cálculos, esto para que el estudiante sepa diferenciar hasta que parte se acaba la Física y en qué punto el problema se reduce a un cálculo matemático (por complicado que este sea) que finalmente nos conducirá a la solución del problema.

En la primera unidad temática se resuelven diversos problemas del área de Mecánica Clásica, disciplina que es fundamental para la comprensión de toda la Física, por lo que se la da un espacio mayor que las unidades temáticas posteriores.

En la segunda unidad temática se resuelven problemas de la electrostática, recalcando el uso de conceptos provenientes de la Mecánica, tales como Fuerza, equilibrio, etc., lo cual pone en evidencia el carácter fundamental de la Mecánica.

Por último en la tercera unidad de temática se abordan los fenómenos del Magnetismo.

Toda esta serie de problemas presentados, forman parte de los temas de la Unidad de aprendizaje de Física, implementada actualmente en la ESCOM DEL IPN.

1 UNIDAD TEMÁTICA I: Mecánica

Problema 1.1

Si un objeto viaja la mitad de su trayectoria total en el último segundo de su caída desde el reposo, halle, el tiempo y la altura de su caída.

Solución:

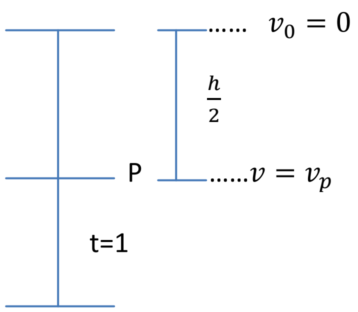

Figura 1.1.

Para la primera mitad de su caída (ver fig. 1.1) calculamos la velocidad en el punto P.

$$v_p^2 = v_o^2 + 2g(\,y - y_o\,)$$

En este caso $v_o = 0$, por lo que

$$v_p^2 = 2g\frac{h}{2} = gh$$

Para la segunda mitad, utilizaremos el tiempo que nos proporcionan como dato, y mediante la ecuación

$$y = v_p t + \frac{1}{2}gt^2$$

Obtenemos

$$\frac{h}{2} = \sqrt{gh} + \frac{1}{2}g$$

Lo cual nos conduce a una ecuación cuadrática para h

$$h^2 - 6gh + g^2 = 0$$

Considerando g =9.81 $\frac{m}{s^2}$ las soluciones son:

$$h_1 = 57.177m \quad y \quad h_2 = 1.683m$$

Estas dos soluciones implican dos tiempos de caída, los cuales podemos calcular directamente de

$$y = \frac{1}{2}gt^2$$

ya que $v_o = 0$

Esto nos conduce a:

$$t_1 = \sqrt{\frac{2h_1}{g}} = \sqrt{\frac{2(57.117m)}{9.81\frac{m}{s^2}}} = 3.41s$$

$$t_2 = \sqrt{\frac{2h_2}{g}} = \sqrt{\frac{2(1.682m)}{9.81\frac{m}{s^2}}} = 0.58s$$

El tiempo $t_2 = 0.58s$ representa el tiempo total decaída lo que contradice las condiciones del problema, por lo que las respuestas al problema son: $h_1 = 57{,}117m \quad y \quad t_1 = 3.41s$

Problema 1. 2

Un globo está ascendiendo a razón de 12.4 $\frac{m}{s}$ a una altura de 81.3m sobre el nivel del suelo cuando se deja caer desde él un bulto.

a) ¿A qué velocidad golpea el bulto el suelo?
b) ¿Cuánto tiempo le tomó llegar al suelo?

Solución:

En el momento que el bulto se desprende del globo, éste tiene una velocidad de 12.4 $\frac{m}{s}$ hacia arriba, por lo que sube todavía cierta altura Δy , la cual calculamos de la ecuación:

$$v^2 = v_o^2 + 2g\Delta y$$

Considerando v=0, tenemos

$$\Delta y = \frac{v_o^2}{2g} = \frac{(12.4\frac{m}{s})^2}{2(9.81\frac{m}{s^2})} = 7.83m$$

Lo que le tomó un tiempo de subida

$$t_1 = \frac{v_{o-V}}{g} = \frac{v_o}{g} = \frac{12.4\frac{m}{s}}{9.81\frac{m}{s^2}} = 1.26s$$

La partícula ahora caerá libremente desde una altura de 81.3m+Δy=81.3m + 7.83m =89.13m, con lo que la velocidad con la que llega al suelo es:

$$v = \sqrt{2gy} = \sqrt{2(9.81\frac{m}{s^2})(89.13m)} = 41.81\frac{m}{s}$$

lo que responde a la primera pregunta.

Y el tiempo que le tomó en caer 89.13m es:

$$t_2 = \sqrt{\frac{2y}{g}} = \sqrt{\frac{2(89.13m)}{9.81\frac{m}{s^2}}} = 4.26s$$

Por lo tanto el tiempo que transcurrió desde que el bulto se desprendió del globo es:

$$t = t_1 + t_2 = 1.26 + 4.26 = 5.52s$$

Problema 1.3

Un perro ve una maceta de flores subir y luego bajar a través de una ventana de 1.1m de altura, si el tiempo total en que la maceta está a la vista es de 0.71s, halle, la altura por sobre el dintel de la ventana a la que se elevó la maceta.

Solución:

Hallaremos la velocidad con la que la maceta se comienza a ver

$$y = v_o t - \frac{1}{2}gt^2$$

De donde

$$v_o = \frac{y}{t} + \frac{1}{2}gt = \frac{1.1m}{0.37s} + \frac{1}{2}\left(9.81\frac{m}{s^2}\right)(0.37s) = 4.78\frac{m}{s}$$

Calculamos ahora la altura máxima a la que llegará la maceta con esa velocidad, puesto que en ese punto v=0

$$y_{max} = \frac{v_o^2}{2g} = \frac{(4.78\frac{m}{s})^2}{2\left(9.81\frac{m}{s^2}\right)} = 1.164m$$

Luego la altura Δy por sobre el dintel de la ventana es:

$$\Delta y = y_{max} - 1.1m = 1.164m - 1.1m = 0.0645m = 6.45cm$$

Problema 1.4

Una piedra es lanzada verticalmente hacia arriba desde el techo de un edificio con una velocidad inicial de $29.4\frac{m}{s}$. Otra piedra se deja caer 4s después que se lanza la primera. Demostrar que la primera piedra pasará a la segunda exactamente 4s después que soltó la segunda.

Demostración:

Calculemos la posición de la primera partícula después de 8s

$$y_1(8s) = v_o t - \frac{1}{2}gt^2 = \left(29.4\frac{m}{s}\right)(8s) - \frac{1}{2}(9.81\frac{m}{s^2})(8s)^2 = -78.2m$$

Lo que significa que la partícula está a 78.2m por debajo de su posición inicial

Calculemos la posición de la segunda partícula después de 4s.

$$y_2(4s) = v_o t + \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2}(9.81\frac{m}{s^2})(4s)^2 = 78.2m$$

Como $y_1(8s) = y_2(4s)$ se tiene la demostración.

Problema 1. 5

Un cuerpo cae libremente. Demostrar que la distancia que recorre durante el enésimo segundo es $(n-\frac{1}{2})g$.

Demostración:

La distancia que recorre la partícula en el enésimo segundo, es la diferencia de la distancia hasta el enésimo segundo con la distancia hasta el segundo n-1, esto es:

Y(n)-Y(n-1)

Tenemos que la partícula cae del reposo

$$y(n)=\frac{1}{2}gn^2$$

$$y(n-1)=\frac{1}{2}g(n-1)^2$$

Luego:

$$y(n)-y(n-1)=\frac{1}{2}g\{(n)^2(n-1)^2\}=\frac{1}{2}g(n^2-n^2+2n-1)=\frac{1}{2}g(2n-1)$$

$$y(n)-y(n-1)=g(n-\frac{1}{2})$$

Por lo que queda demostrado.

Problema 1.6

Se lanzan dos cuerpos verticalmente hacia arriba, con la misma velocidad de salida de $100\frac{m}{s}$, pero separados 4s. ¿Qué tiempo transcurrió desde que se lanzó el primero para que se vuelvan a encontrar?

Solución:

La ecuación que describe la posición con el tiempo de la primera partícula es:

$$y_1 = v_o t - \frac{1}{2} g t^2$$

Pero la segunda

$$y_2 = v_o (t-4) - \frac{1}{2} g (t-4)^2$$

Para hallar el tiempo en el que se vuelven a encontrar imponemos la condición

$$y_1 = y_2$$

Es decir

$$v_o t - \frac{1}{2} g t^2 = v_o (t-4) - \frac{1}{2} g (t-4)^2$$

Con lo que obtenemos

$$t = 2 + \frac{v_o}{g}$$

Sustituyendo valores

$$t = 2s + \frac{100\frac{m}{s}}{9.81\frac{m}{s^2}} = 12.19s$$

Problema 1.7

Un cuerpo se deja caer y simultáneamente un segundo cuerpo se tira hacia abajo, con una velocidad inicial de $100\frac{cm}{s}$ ¿Cuándo será la distancia entre ellos de 18m?

Solución:

La ecuación que describe la caída del primer cuerpo es:

$$y_1 = \frac{1}{2}gt^2$$

Ya que cae desde el reposo.

Para la segunda partícula:

$$y_2 = v_o t + \frac{1}{2}gt^2$$

Para resolver el problema impongamos que $y_2 - y_1 = 18m$ esto es:

$$y_2 - y_1 = v_o t + \frac{1}{2}gt^2 - \frac{1}{2}gt^2 = v_o t = 18$$

Por lo tanto:

$$t = \frac{y_2 - y_1}{v_o} = \frac{18m}{1\frac{m}{s}} = 18s$$

Problema 1.8

Se deja caer una piedra desde lo alto de un edificio. El sonido de la piedra al chocar con el suelo se escucha 6.5s más tarde, si la velocidad del sonido es de 1120$\frac{ft}{s}$, calcular la altura del edificio.

Solución:

Tenemos que el tiempo de caída libre de la piedra hasta el suelo (t_c) mas el tiempo de subida de la velocidad del sonido (t_s) es de 6.5s esto es:

$$t_c + t_s = 6.5\text{s}$$

Puesto que la velocidad del sonido es constante

$$t_s = \frac{h}{v_s}$$

Donde h es la altura del edificio y v_s la velocidad del sonido. Por lo que:

$$t_s + \frac{h}{v_s} = 6.5$$

La ecuación que describe la caída libre desde el reposo de la piedra es:

$$y = \frac{1}{2} g {t_c}^2$$

Sustituyendo a t_c, obtenemos

$$t_c = 6.5 - \frac{h}{v_s}$$

Y

$$y=h$$

Por lo que

$$h = \frac{1}{2} g (6.5 - \frac{h}{v_s})^2 = 207.23 - 0.18h + 8.58x10^{-6}h^2$$

Por lo tanto

$$h \approx 207.23 - 0.18\text{h}$$

de donde

$$\text{h} = 175.61\text{m}$$

Problema 1.9

Se tira una piedra hacia arriba desde el fondo de un pozo de 88ft de profundidad con una velocidad inicial de 240$\frac{ft}{s}$. Calcule el tiempo que demorará la piedra en alcanzar el borde del pozo y su velocidad. Discutir las posibles respuestas.

Solución:

Calculamos el tiempo que le toma a la piedra alcanzar una altura de 88ft, mediante la ecuación

$$y = v_o t - \frac{1}{2} g t^2$$

Sustituyendo los valores del problema (considerando $g = 32\frac{ft}{s^2}$), se tiene

$$88 = 240\mathrm{t} - 16t^2$$

Lo cual es una ecuación cuadrática

$$16t^2 - 240\mathrm{t} + 88 = 0$$

Cuyas soluciones son:

$$t_1 = 0.37s \quad y \quad t_2 = 14.62s$$

t_1 representa el tiempo que le tomó a la partícula llegar a 88ft cuando va de subida, llega a una altura máxima y ahora cae para pasar nuevamente por el borde del pozo, lo cual corresponde a t_2.

Problema 1.10

Una piedra es proyectada a una velocidad inicial de $120\frac{ft}{s}$ en una dirección $62°$ sobre la horizontal, hacia un acantilado de altura h, como se muestra en la figura 1.2. La piedra golpea al terreno en A 5.5s después del lanzamiento. Halle:

a) La altura h del acantilado
b) La velocidad de la piedra en el momento antes que impacte en A
c) Halle la altura máxima H alcanzada sobre el suelo

Solución:

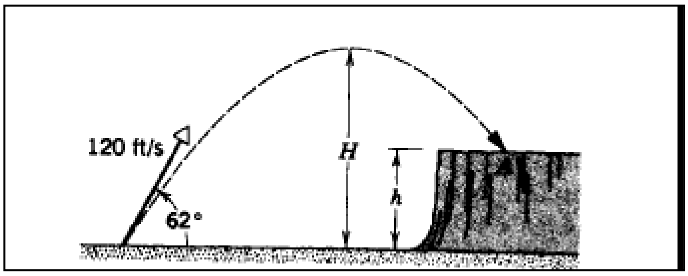

Figura 1.2

a) La velocidad horizontal en el movimiento parabólico es contante por lo que

$$v_{ox} = \frac{x}{t}$$

Después de 5.5s la distancia horizontal recorrida es:

$$x = v_{ox}t = v_o cos\theta_o t = \left(120\frac{ft}{s}\right) cos62°(5.5s)$$

$$x = 309.85ft$$

Para hallar la altura del acantilado, basta con sustituir este desplazamiento en la ecuación de la parábola

$$y = tan\theta_o x - \frac{g}{2v_o^2 cos^2\theta_o} x^2$$

$$h = (tan62°)(309.85ft) - \frac{32\frac{ft}{s^2}}{2(120\frac{ft}{s})^2 cos^2 62°}(309.85ft)^2$$

Por lo que:

$$\mathrm{h = 98.74ft}$$

b)La velocidad de impacto tiene dos componentes, la componente en x es inmediata

$$v_x = v_{ox} = v_o cos62° = 56.33\frac{ft}{s}$$

La velocidad en y la obtenemos calculando la caída libre de la partícula desde la altura máxima H, hasta la altura del acantilado h, esto es:

$$v_y^2 = v_o^2 + 2g(H-h) = 2g(H-h)$$

$$v_y^2 = 2\left(32\frac{ft}{s^2}\right)(175.4ft - 98.79ft)$$

$$v_y = 70.04\frac{ft}{s}$$

Por lo tanto la velocidad de impacto es:

$$\vec{v}_A = 55.33\frac{ft}{s}\hat{\imath} - 70.04\frac{ft}{s}\hat{\jmath}$$

Cuya magnitud es:

$$|\vec{v}_A| = \sqrt{(55.33\frac{ft}{s})^2 + (70.04\frac{ft}{s})^2}$$

$$|\vec{v}_A| = 89.25\frac{ft}{s}$$

Y dirección:

$$tan\theta = \frac{70.04}{55.33}$$

$$\theta = 51.69°$$

bajo la horizontal.

c) La altura máxima la obtenemos directamente de:

$$H = \frac{v_o^2}{2g}sen^2\theta_o$$

$$H = \frac{(120\frac{ft}{s})^2}{2(32\frac{ft}{s^2})}sen^2 62° = 175.4ft$$

Problema 1. 11

Un cañón está listo para disparar proyectiles con una velocidad inicial v_o directamente sobre la ladera de la colina con un ángulo de elevación α, como se muestra en la figura 1.3. ¿A qué ángulo a partir de la horizontal deberá ser apuntado el cañón para obtener el alcance máximo posible R sobre la ladera de la colina?

Solución:

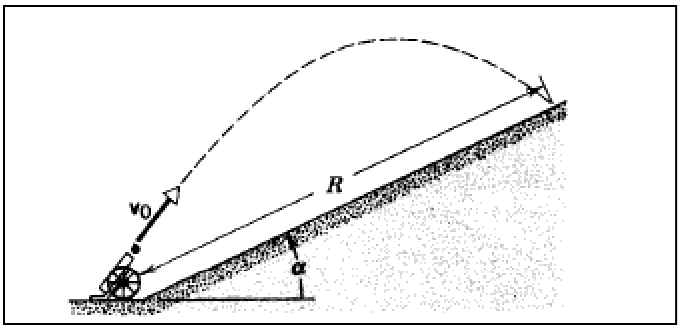

Figura 1.3

Hallemos primero el alcance R del proyectil sobre la colina.

La ecuación del proyectil es:

$$y = tan\theta_o x - \frac{g}{2v_o^2 cos^2\theta_o} x^2$$

La ecuación que representa a la colina es:

$$y = tan\alpha x$$

Para hallar el punto en el que choca el proyectil con la colina, resolvemos simultáneamente el sistema de ecuaciones, igualando

$$tan\alpha x = tan\theta_o x - \frac{g}{2v_o^2 cos^2\theta_o} x^2$$

Arreglando términos

$$\frac{g}{2v_o^2 cos^2\theta_o} x^2 + (tan\alpha - tan\theta_o)x = 0$$

Lo cual es una ecuación cuadrática para x, cuyas dos soluciones son:

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = \frac{2v_o^2 cos^2\theta_o (tan\theta_o - tan\alpha)}{g}$$

Estas dos soluciones implican dos soluciones para y esto es:

$$y_1 = 0$$

$$y_2 = \frac{2v_o^2 cos^2\theta_o (tan\theta_o - tan\alpha)tan\alpha}{g}$$

Una solución al sistema es el origen, el punto en el que nuestro proyectil fue disparado, (0,0), la otra solución es el punto en e l que el proyectil impacta.

Para calcular el alcance utilizamos el teorema de Pitágoras

$$R = \sqrt{x_2^2 + y_2^2} = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 tan^2\alpha} = x_2\sqrt{1 + tan^2\alpha}$$

$$R = x_2 sec\alpha$$

Es decir

$$R = \frac{2v_o^2 cos^2\theta_o (tan\theta_o - tan\alpha)sec\alpha}{g}$$

Para hallar el ángulo que hace máximo al alcance, maximizamos a R, imponiendo la condición

$$\frac{dR(\theta_o)}{d\theta_o} = 0$$

Esto es:

$$\frac{dR}{d\theta_o} = \frac{2v_o^2 sec\alpha}{g}\frac{d}{d\theta_o}(sen\theta_o cos\theta_o - tan\alpha cos^2\theta_o)$$

$$\frac{2v_o^2 sec\alpha}{g}(cos^2\theta_o - sen^2\theta_o - 2tan\alpha\ sen\theta_o cos\theta_o) = 0$$

Por lo tanto nos queda la ecuación:

$$(cos^2\theta_o - sen^2\theta_o - 2tan\alpha\ sen\theta_o cos\theta_o) = 0$$

Utilizando identidades trigonométricas la ecuación se reduce a

$$(cos2\theta_o - tan\alpha\ 2sen\theta_o) = 0$$

Reduciendo:

$$\tan 2\,\theta = -\frac{1}{tan\alpha}$$

Finalmente, el ángulo que hace máximo el alcance es:

$$\theta_o = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(-\frac{1}{tan\alpha}\right)$$

Ya que

$$\frac{d^2R(\theta_o)}{d\theta_0^2} < 0$$

Nótese que si α=45°, estamos en el caso del alcance horizontal, lo cual, es un caso especial de nuestros resultados.

Problema 1.12

Durante las erupciones volcánicas pueden ser lanzados por el volcán gruesos trozos de roca. Ver la figura 1.4.

a) ¿A qué velocidad inicial tendría que ser lanzado el trozo de roca formado 35° con la horizontal, con objeto de caer en el pie B del volcán?
b) ¿Cuál es el tiempo de recorrido en el espacio?

Solución:

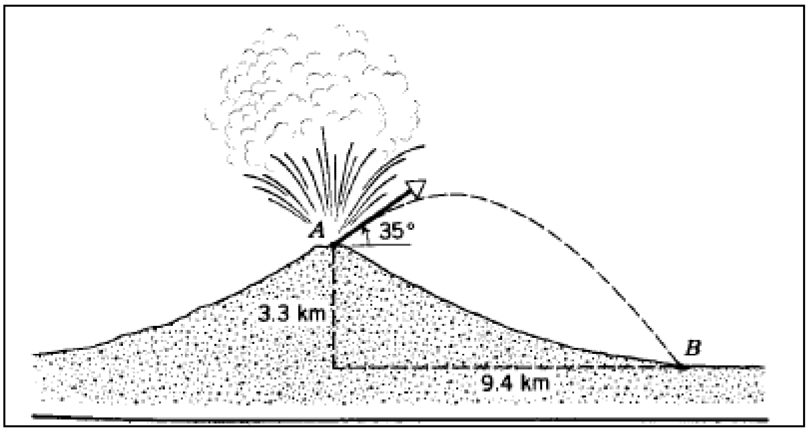

Figura 1.4

a) De la ecuación del tiro parabólico

$$y = tan\theta_o x - \frac{g}{2v_o^2 cos^2\theta_o} x^2$$

Simplemente despejamos a la velocidad inicial obteniendo:

$$v_o = \sqrt{\frac{gx^2}{2cos^2\theta_o(tan\theta_o x - y)}}$$

Sustituyendo:

$$v_o = \sqrt{\frac{(9.81\frac{m}{s^2})(3300m)^2}{2cos^2 35\{tan35(3300m) - (-9400m)\}}}$$

$$v_o = 74.62\frac{m}{s}$$

b) La velocidad en y es contante, por lo tanto

$$v_{ox} = \frac{x}{t}$$

Por lo que

$$t = \frac{x}{v_{ox}} = \frac{x}{v_o cos35} = \frac{3300}{(74.62)cos35} = 53.98s$$

Problema 1. 13

En el libro de galileo "dos ciencias nuevas" el sabio afirmo que "para elevaciones iguales (ángulos de proyección) que excedan o no lleguen a 45° por cantidades iguales, los alcances son iguales" (ver figura 1.5).

a) Pruebe esta aseveración
b) Para una velocidad inicial de $30\frac{m}{s}$ y un alcance de 20m, halle los dos ángulos posibles de devolución de la proyección

Solución:

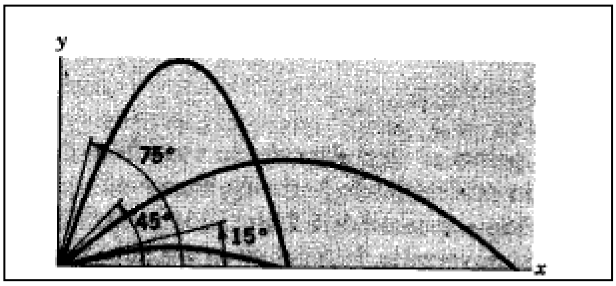

Figura 1.5

a) Calculamos los alcances para los ángulos de proyección θ+45 y θ-45

$$R(\theta + 45) = \frac{v_o^2}{g} sen2(\theta + 45) = \frac{v_o^2}{g} sen(2\theta + 90)$$

Utilizando la identidad trigonométrica de adición de ángulos

$$R(\theta + 45) = \frac{v_o^2}{g}(sen2\theta\cos90 + \cos2\theta\text{sen}90) = \frac{v_o^2}{g} cos2\theta$$

Análogamente

$$R(\theta - 45) = \frac{v_o^2}{g} sen2(\theta - 45) = \frac{v_o^2}{g} sen(2\theta - 90)$$

$$R(\theta - 45) = \frac{v_o^2}{g}(sen2\theta\cos 90 - \cos 2\theta \text{sen} 90) = \frac{v_o^2}{g}cos2\theta$$

Por lo tanto

$$R(\theta - 45) = R(\theta + 45)$$

b) Si la velocidad inicial es de $30\frac{m}{s}$ y el alcance 20m tenemos que

$$20m = \frac{(30\frac{m}{s})^2}{9.81\frac{m}{s^2}}cos2\theta$$

De donde

$$\theta = \frac{1}{2}\cos^{-1}(0.218) = 38.7$$

Por lo que los dos posibles ángulos se proyección son:

$$\theta_1 = 45 + 38.7 = 83.7 \quad y \quad \theta_2 = 45 - 38.7 = 6.3$$

Problema 1.14

Un pateador de un equipo de futbol puede dar a la pelota una velocidad inicial de $25\frac{m}{s}$. ¿Dentro de que zona angular deberá ser pateado el balón si el pateador debe apenas anotar un gol de campo desde un punto si está a 50m de los postes de gol cuya barra horizontal está a 3.44m sobre el suelo?

Solución:

De la ecuación de tiro parabólico

$$y = tan\theta_o x - \frac{g}{2v_o^2 cos^2\theta_o}x^2$$

Despejamos el ángulo inicial y usando las identidades trigonométricas

$$\frac{1}{cos\theta} = sec\theta \quad y \quad 1 + tan^2\theta = sec^2\theta$$

Obtenemos:

$$y = tan\theta_o x - \frac{gx^2}{2v_o^2}(1 + tan^2\theta)$$

Reordenando términos

$$-\frac{gx^2}{2v_o^2}\ tan^2\theta_o + xtan\theta_o - \left(\frac{gx^2}{2v_o^2} + y\right) = 0$$

La cual es una ecuación cuadrática para tan θ, sustituyendo valores:

$$-19.62tan^2\theta_o + 50tan\theta - 20.62 = 0$$

Cuyas soluciones son

$$tan\theta_{01} = 2.0309$$

$$tan\theta_{02} = 0.51748$$

Y los correspondientes ángulos son

$$\theta_{01} = 63.782$$

$$\theta_{02} = 27.3$$

Por lo que la zona angular es

$$27.3 \leq \theta \leq 63.78$$

Problema 1. 15

Calcule la aceleración de una persona situada en latitud $40°$ debida a la rotación de la Tierra.

Solución.

La magnitud de la aceleración centrípeta de la persona es

$$a = \frac{v^2}{r}$$

puesto que es debida a la rotación terrestre, con

$$v = \frac{2\pi R cos\theta}{T}$$

donde R es el radio de la Tierra, T su periodo de rotación y θ la latitud.

Sustituyendo

$$v = \frac{2\pi(6370km)cos40°}{24h} = 1277.45\frac{km}{h}$$

Por lo tanto, la magnitud de la aceleración centrípeta es

$$a = \frac{\left(1277.45\frac{km}{h}\right)^2}{(6370km)cos40°} = 334.42\frac{km}{h^2}$$

Problema 1.16

Un niño hace girar una piedra en un círculo horizontal situado a $1.9m$ sobre el suelo por medio de una cuerda de $1.4m$ de longitud. La cuerda se rompe, y la piedra sale disparada horizontalmente, golpeando el suelo a 11m de distancia. ¿Cuál fue la aceleración centrípeta de la piedra mientras estaba en movimiento circular?

Solución.

El tiempo que le tomó en llegar a la piedra a los $11m$ de distancia fue el mismo que le tomó caer $1.9m$, por lo tanto

$$y = \frac{1}{2}gt^2$$

$$t = \sqrt{\frac{2y}{g}} = \sqrt{\frac{2(1.9m)}{9.8\frac{m}{s^2}}} = 0.62s$$

Por lo que la velocidad en x de la trayectoria parabólica es

$$v_x = \frac{d}{t} = \frac{11m}{0.62s} = 17.7\frac{m}{s}$$

La cual es precisamente la velocidad tangencial que llevaba la piedra en el movimiento circular, en consecuencia, la magnitud de la aceleración centrípeta es

$$a_c = \frac{v_x^2}{r} = \frac{\left(17.7\frac{m}{s}\right)^2}{1.4m} = 224.8\frac{m}{s^2}$$

Problema 1.17

Una partícula en movimiento circular uniforme con respecto al origen O tiene una velocidad v. Demuestre que el tiempo Δt requerido para que pase a través de un desplazamiento angular $\Delta\theta$ está dado por

$$\Delta t = \frac{360° r}{2\pi}\frac{\Delta\theta}{v}$$

En donde $\Delta\theta$ esta en grados.

Demostración.

De la definición de radián tenemos que

$$\Delta\theta = \frac{\Delta s}{r}$$

Si la partícula se mueve con velocidad v entonces

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = v$$

de donde

$$\Delta s = v\Delta t$$

Sustituyendo en la primera ecuación,

$$\Delta\theta = \frac{v\Delta t}{r}$$

Con lo que

$$\Delta t = \frac{r\Delta\theta}{v}$$

Aquí $\Delta\theta$ está en radianes, entonces $1rad = \frac{360°}{2\pi}$, por lo que $\Delta\theta rad = \left(\frac{360}{2\pi}\,\Delta\theta\right)°$.

Sustituyendo,

$$\Delta t = \frac{360°}{2\pi}\frac{r\Delta\theta}{v}$$

Problema 1.18

Una partícula se mueve en un plano de acuerdo a

$$x = R\sin\omega t + \omega Rt$$

$$y = R\cos\omega t + R$$

Donde ω y R son constantes. Esta curva, llamada cicloide es la trayectoria trazada por un punto de la llanta de una rueda que gira sin resbalamiento a lo largo del eje x. Calcule la velocidad y la aceleración instantáneas cuando la partícula está en el valor de y máximo y mínimo.

Solución.

Calculemos la velocidad

$$\frac{dx}{dt} = R\omega cos\omega t + \omega R$$

$$\frac{dy}{dt} = -R\omega sen\omega t$$

Y es el máximo cuando $cos\omega t = 1$ y mínimo cuando $cos\omega t = -1$, por lo tanto

$$v_x(y_{máx}) = 2R\omega$$

$$v_y(y_{máx}) = 0$$

Calculemos la aceleración

$$\frac{dv_x}{dt} = -R\omega^2 sen\omega t$$

$$\frac{dv_y}{dt} = -R\omega^2 cos\omega t$$

La aceleración en $y_{máx}$ es

$$a_x(y_{máx}) = 0$$

$$a_y(y_{máx}) = -R\omega^2$$

Por lo que

$$|a| = R\omega^2$$

Problema 1.19

Una plomada, que consta de una pequeña pesa suspendida por un cordón de masa despreciable, cuelga del techo de un vagón de ferrocarril y actúa como un acelerómetro.

a) Demuestre que la expresión que relaciona a la aceleración horizontal a del carro con el ángulo θ formado por el cordón con la vertical está dada por $a = gtan\theta$.
b) Halle a cuando $\theta = 20°$.
c) Halle θ cuando $a = 5.0\frac{ft}{s^2}$.

a) Demostración:

Las ecuaciones de movimiento son:

$$T\ cos\theta - mg = 0$$

$$T\ sen\theta = ma$$

Combinando estas ecuaciones:

$$\frac{Tsen\theta}{Tcos\theta} = \frac{ma}{mg} = \frac{a}{g}$$

De donde:

$$tan\theta = \frac{a}{g}$$

Por lo que:

$$a = \ gtan\theta$$

b) Si $\theta = 20°$

$$a = \left(9.81\frac{m}{s^2}\right)tan20° = 3.5\frac{m}{s^2}$$

c) Si $a = 5.0\frac{ft}{s^2}$

$$tan\theta = \frac{5}{9.81} \Longrightarrow\ \theta = 27°$$

Problema 1. 20

Consideremos el sistema mostrado en la Figura 1.6, el sistema ha salido del reposo. Describe el movimiento.

Solución:

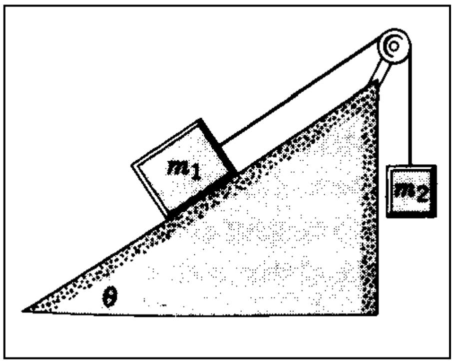

Figura 1.6

Colocando un sistema de referencia en el que el eje x sea paralelo al plano inclinado y el origen sea m_1, tenemos las ecuaciones:

$$N - m_1 g cos\theta = 0$$

$$T - m_1 g sen\theta = ma$$

Colocando el sistema de referencia en m_2 tenemos

$$T - m_2 g = -m_2 a$$

La primera ecuación nos dice cuánto vale la normal

$$N = m_1 g cos\theta$$

Las dos últimas ecuaciones determinan la tensión T y la aceleración a, combinándolas tenemos que:

$$m_2 g - m_2 a - m_1 g sen\theta = m_1 a$$

$$(m_1 + m_2)a = m_2 g - m_1 g sen\theta$$

$$a = \frac{m_2 - m_1 sen\theta}{m_1 + m_2} g$$

La tensión es:

$$T - m_2 g = -m_2\left(\frac{m_2 - m_1 sen\theta}{m_1 + m_2} g\right)$$

$$T = m_2 g\left(1 - \frac{m_2 - m_1 sen\theta}{m_1 + m_2}\right)$$

$$T = m_2 g(\frac{m_1 + m_2 - m_2 + m_1 sen\theta}{m_1 + m_2})$$

$$T = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g(1 + sen\theta)$$

Problema 1.21

La máquina de Atwood es un arreglo de poleas, el cual se usa para medir la aceleración gravitacional. Consiste en dos masas distintas $m_1 \ y \, m_2$ unidas por una cuerda que pasa por una polea ideal, (ver figura 1.7) halle la aceleración del sistema y la tensión en la cuerda.

Solución:

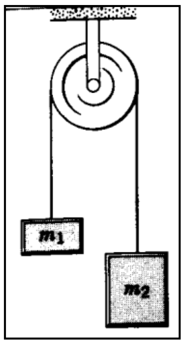

Figura 1.7

Colocando nuestro sistema de referencia en el bloque m_1, las fuerzas involucradas son:

$$T - m_1 g = m_1 a$$

Colocando el sistema de referencia en el bloque dos tenemos que:

$$T - m_2 g = -m_2 a$$

Aquí hemos supuesto que m_2 jala a m_1.

Resolviendo el sistema de ecuaciones, tenemos que:

$$T = m_1 a + m_1 g$$

Sustituyendo en la segunda ecuación:

$$m_1 a + m_1 g - m_2 g = -m_2 a$$

$$(m_1 + m_2)a = (m_2 - m_1)g$$

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g$$

Por lo que la tensión es:

$$T = m_1 a + m_1 g = m_1 \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g\right) + m_1 g$$

$$T = m_1 g \left(1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right) = m_1 g (\frac{m_1 + m_2 + m_2 - m_1}{m_1 + m_2})$$

Finalmente

$$T = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g$$

Nótese que si $m_1 = m_2$, la aceleración del sistema es cero, lo cual se sigue de nuestros resultados.

Problema 1.22

Un disco de masa m que está sobre una mesa sin fricción está atada a un cilindro colgante de masa M por medio de un cordón que pasa por un orificio. Halle la velocidad con que debe de moverse el disco, en un radio r, para que el cilindro permanezca en reposo.

Solución:

Las fuerzas a lo largo del cordón son:

$$T = ma = m\frac{v^2}{r}$$

Y sobre la pesa que cuelga

$$T - Mg = 0$$

Ya que no queremos que caiga cambiando estas ecuaciones:

$$Mg = m\frac{v^2}{r}$$

Por lo que

$$v^2 = \frac{M}{m} gr$$

$$v = \sqrt{\frac{M}{m} gr}$$

Problema 1.23

Considere el siguiente sistema mecánico (ver figura 1.8). El sistema ha salido del reposo, el coeficiente de fricción entre el bloque y el plano inclinado es μ_k . Describe el movimiento.

Solución:

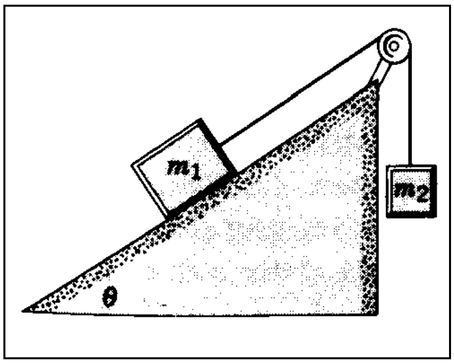

Figura 1.8

Para el bloque m_1 las ecuaciones son:

$$N - m_1 gcos\theta = 0$$

$$T - \mu_K N - m_1 gsen\theta = m_1 a$$

Para el bloque m_2

$$T - m_2 g = -m_2 a \quad \dots\dots\dots(1)$$

La primera ecuación nos dice cuánto vale la normal

$$N = m_1 gcos\theta$$

Lo cual utilizaremos en la segunda ecuación

$$T = \mu_K m_1 gcos\theta - m_1 gsen\theta = m_1 a \quad \dots\dots(2)$$

Combinando (1) y (2), despejamos la tensión T y la aceleración a

$$m_2 g - m_2 a - \mu_K m_1 gcos\theta - m_1 gsen\theta = m_1 a$$

$$(m_1 + m_2)a = m_2 g - \mu_K m_1 gcos\theta - m_1 gsen\theta$$

$$a = \frac{m_2 - m_1 \mu_K cos\theta - m_1 sen\theta}{m_1 + m_2} g$$

Y la tensión T

$$T = m_2 g - m_2 a = m_2 g - m_2 \left(\frac{m_2 - m_1 \mu_K cos\theta - m_1 sen\theta}{m_1 + m_2} \right)$$

$$T = m_2 g(1 - \frac{m_2 - m_1 \mu_K cos\theta - m_1 sen\theta}{m_1 + m_2})$$

$$T = m_2 g(\frac{m_1 + m_2 - m_2 + m_1\mu_K cos\theta - m_1 sen\theta}{m_1 + m_2})$$

Finalmente

$$T = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g(1 + \mu_K cos\theta + sen\theta)$$

Problema 1.24

Un alambre se romperá cuando la tensión exceda de $1.22kN$. Si el alambre, no necesariamente horizontal, se emplea para arrastrar una caja por el piso, ¿cuál es el peso más grande que puede ser movido si el coeficiente de fricción estática es de 0.35?

Solución.

Las ecuaciones de movimiento son

$$N + Tsen\theta - W = 0$$

$$-\mu_s N + Tcos\theta = 0$$

En la segunda ecuación impusimos que el bloque sea arrastrado con velocidad constante, W representa el peso del bloque.

Combinando estas ecuaciones, obtenemos

$$-\mu_s(W - Tsen\theta) + Tcos\theta = 0$$

De donde

$$W = T\left(\frac{cos\theta}{\mu_s} + sen\theta\right)$$

Luego el ángulo que hace máximo a W se obtiene de la condición

$$\frac{dW(\theta)}{d\theta} = 0$$

$$-\frac{sen\theta}{\mu_s} + cos\theta = 0$$

Con lo que se obtiene

$$tan\theta = \mu_s$$

$$\theta = \arctan(0.35) = 19.29$$

Por lo que

$$W_{máx} = W(19.29°)$$

Esto es

$$W_{máx} = 1.22kN\left(\frac{cos19.29°}{0.35} + sen19.29°\right) = 3.69kN$$

Problema 1.25

En la figura 1.9, A es un bloque de $4.4kg$ y B es un bloque de $2.6kg$. Los coeficientes de fricción estática y cinética entre el bloque A y la mesa son de 0.18 y 0.15. a) Determine la masa mínima del bloque C que debe colocarse sobre A para evitar que se deslice. b) El bloque C es levantado súbitamente de A. ¿Cuál es la aceleración del bloque A?

Solución.

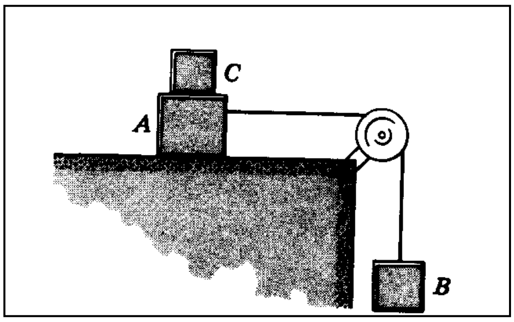

Figura 1.9

a) Del análisis de fuerzas, las ecuaciones de movimiento son

$$N - (m_A + m_C)g = 0$$
$$-\mu_s N + T = 0$$

En donde hemos impuesto la condición de que el bloque A no se mueva.
La ecuación para el bloque B es

$$T - m_B g = 0$$

Combinando estas ecuaciones obtenemos

$$-\mu_s(m_A + m_C)g + m_B g = 0$$

De donde

$$m_C = \frac{m_B}{\mu_s} - m_A$$

Sustituyendo valores

$$m_C = \frac{2.6kg}{0.18} - 4.4kg = 10.04kg$$

b) Si se quita el bloque C, las ecuaciones de movimiento son ahora

$$N - m_A g = 0$$
$$-\mu_s N + T = m_A a$$
$$T - m_B g = -m_B a$$

Combinando estas ecuaciones,

$$-\mu_k m_A g + m_B g - m_B a = -m_A a$$

Con lo que se obtiene

$$a = \frac{m_B - \mu_k m_A}{m_A + m_B} g$$

Sustituyendo valores

$$a = \frac{4.4kg - 0.15(2.6kg)}{(4.4 + 2.6)kg}\left(9.8\frac{m}{s^2}\right) = 2.71\frac{m}{s^2}$$

Problema 1.26

Se sujeta una cadena sobre una mesa sin fricción desde la que cuelga un cuarto de su longitud. Si la cadena tiene una longitud L y una masa m, ¿cuánto trabajo se requiere para jalar la parte que cuelga hasta que quede totalmente sobre la mesa.

Solución.

Tenemos que

$$W = \int F dy$$

En este caso F representa el peso de la parte que cuelga de la cadena, si la cadena tiene densidad por unidad de longitud constante, tenemos que

$$\frac{m(y)}{y} = \frac{m}{L}$$

Donde $m(y)$ y y representan la porción de masa que cuelga en una longitud y de la cadena. Por lo tanto

$$m(y) = \frac{m}{L} y$$

Luego

$$F = F(y) = \frac{m}{L} yg = \frac{mg}{L} y$$

Sustituyendo

$$W = \int_0^{\frac{1}{4}L} F(y)dy = \int_0^{\frac{1}{4}L} \frac{mg}{L} ydy = \frac{mg}{2L} y^2 \Big|_0^{\frac{1}{4}L} = \frac{mgL}{32}$$

Problema 1.27

La fuerza ejercida sobre un objeto es $F = F_0\left(\frac{x}{x_0} - 1\right)$. Halle el trabajo efectuado para mover el objeto desde $x = 0$ hasta $x = 3x_0$.

Solución.

Tenemos que $W = \int \vec{F} \cdot \vec{d}\, d\vec{r}$, en una dimensión $W = \int F dx$

Sustituyendo

$$W = \int_0^{3x_0} F_0\left(\frac{x}{x_0} - 1\right) dx$$

Lo cual se puede escribir como

$$W = F_0\left[\frac{1}{x_0}\int_0^{3x_0} x dx - \int_0^{3x_0} dx\right]$$

$$W = F_0\left(\frac{1}{2x_0}(3x_0)^2 - 3x_0\right)$$

$$W = \frac{3F_0 x_0}{2}$$

Problema 1.28

Un objeto de masa m acelera uniformemente desde el reposo hasta una velocidad v_f en un tiempo t_f .

a) Demuestre que el trabajo efectuado sobre el objeto como una función del tiempo es, en términos de v_f y de t_f :

$$W = \frac{1}{2} m \frac{v_f^2}{t_f^2} t^2$$

b) Como una función del tiempo t, ¿cuál es la potencia instantánea dado el objeto?

a) Demostración.

Tenemos que el trabajo es:

$$W = \int_{x_o}^{x} F dx$$

Como el objeto acelera de forma uniforme, $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$, es constante por lo que:

$$W = ma(x - x_o)$$

Pero $a = \frac{v_f}{t_f}$ y $x = \frac{1}{2}at^2, x_o = 0$

Ya que parte del reposo, sustituyendo:

$$W = ma\frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}ma^2t^2$$

$$W = \frac{1}{2}m\frac{v_f^2}{t_f^2}t^2$$

b)Tenemos que:

$$P = \frac{dw}{dt}$$

Por lo tanto derivamos directamente el trabajo, con lo que obtenemos

$$P = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\frac{v_f^2}{t_f^2}t^2\right) = m\frac{v_f^2}{t_f^2}t$$

Problema 1.29

Demuestre que la velocidad v alcanzada por un automóvil de masa m que es impulsado con una potencia constante P está dada por:

$$v = \left(\frac{3xP}{m}\right)^{1/3}$$

Donde x es la distancia recorrida desde el reposo.

Demostración:

Por el teorema del trabajo- energía tenemos que

$$W = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_o^2 = \frac{1}{2}mv^2$$

Ya que parte del reposo, tomando la derivada del trabajo con respecto al tiempo obtenemos la potencia, esto es:

$$\frac{dw}{dt}=\frac{1}{2}m\frac{dv^2}{dt}=mv\frac{dv}{dt}=mv\frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt}=mv^2\frac{dv}{dx}$$

Por lo tanto

$$P=mv\frac{dv}{dx}$$

$$mv^2dv=Pdx$$

$$\int_0^v v^2dv=\frac{P}{m}\int_0^x dx$$

$$\frac{1}{3}v^3=\frac{Px}{m}$$

$$v=\left(\frac{3xP}{m}\right)^{1/3}$$

Problema 1.30

Una piedra de peso W es arrojada verticalmente hacia arriba en el aire a una velocidad inicial v_0, en presencia de una fuerza de fricción f. a) Demuestre que la altura máxima alcanzada por la piedra es

$$h=\frac{v_0^2}{2g\left(1+\frac{f}{W}\right)}$$

b) Demuestre que la velocidad de la piedra al momento del impacto es

$$v=v_0\left(\frac{W-f}{W+f}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Demostración

a) Aplicando el teorema de Trabajo-Energía entre la posición inicial y final (altura máxima) obtenemos

$$W=\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}mv_0^2$$

Para hallar la altura máxima, $v=0$ y $W=(-W-f)h$, sustituyendo

$$-(W+f)h=\frac{1}{2}mv_0^2$$

$$h=\frac{mv_0^2}{2(W+f)}$$

$$h = \frac{v_0^2}{2g\left(1 + \frac{f}{W}\right)}$$

b) Aplicando nuevamente el teorema Trabajo-Energía, entre la altura máxima y el suelo, tenemos ahora

$$-(-W + f)h = \frac{1}{2}mv^2$$

$$-(f - W)\frac{v_0^2}{2g\left(1 + \frac{f}{W}\right)} = \frac{1}{2}mv^2$$

$$\frac{f - W}{1 + \frac{f}{W}} v_0^2 = Wv^2$$

$$v^2 = \frac{W - f}{W + f} v_0^2$$

$$v = v_0 \left(\frac{W - f}{W + f}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Problema 1.31

Un joven está sentado en la parte superior de un montículo de hielo. Se da a sí mismo un pequeño impulso y comienza a deslizarse hacia abajo. Demuestre que abandona el hielo en el punto cuya altura es de $\frac{2R}{3}$ si el hielo carece de fricción.

Demostración.

La componente radial de las fuerzas en un punto arbitrario de la caída del joven es

$$N - mg\cos\theta = ma$$

Donde θ es el ángulo entre la dirección del peso y el eje radial. Por ser un movimiento circular,

$$N - mg\cos\theta = -m\frac{v^2}{R}$$

Justo en el punto que se desprende del hielo la normal vale cero, por lo que

$$g\cos\theta = \frac{v^2}{R}$$

Aplicaremos conservación de la energía para hallar v en el punto en que $N = 0$.

Considerando la posición inicial del joven y el punto en el que se desprende del hielo, y además colocando el potencial cero al pie del montículo, la conservación de la energía es

$$E_i = mgR$$

$$E_f = mgh + \frac{1}{2}mv^2$$

Lo cual implica que

$$mgR = mgh + \frac{1}{2}mv^2$$

En donde h es la altura del punto en el que el joven se desprende del hielo. La última ecuación nos da

$$v^2 = 2g(R-h)$$

y $\cos\theta = \frac{h}{R}$, con lo que, finalmente

$$g\frac{h}{R} = \frac{2g(R-h)}{R}$$

$$h = 2R - 2h$$

$$3h = 2R$$

$$h = \frac{2}{3}R$$

Problema 1.32

Dos niños están jugando a tratar de golpear una pequeña caja que está en el suelo con una canica que disparan con un rifle de resorte montado sobre la mesa. La caja blanco está a 2.2 m de distancia horizontal desde el borde de la mesa. Robertito comprime el resorte 1.1 cm, pero a la canica le faltan 27 cm para dar en el blanco. ¿Qué tanto tendrá que comprimir Juanito el resorte para darle al blanco?

Solución.

La energía del resorte totalmente comprimido en el primer intento es

$$E_{i1} = \frac{1}{2}kx_1^2$$

La energía del sistema canica-resorte justo en la boca del rifle es

$$E_{f1} = \frac{1}{2}mv^2$$

Aplicando conservación de la energía,

$$\frac{1}{2}kx_1^2 = \frac{1}{2}mv_1^2$$

Donde v_1 es la velocidad en x del subsecuente tiro parabólico, por lo que se puede escribir como, $v_1 = \frac{l_1}{t_1}$, siendo l_1 la distancia horizontal recorrida en el primer intento y t_1 el tiempo de caída de la canica desde la mesa.

Por lo tanto

$$kx_1^2 = m\frac{l_1^2}{t_1^2}$$

De donde

$$k = \frac{ml_1^2}{x_1^2 t_1^2}$$

Análogamente para el intento dos

$$k = \frac{ml_2^2}{x_2^2 t_2^2}$$

Nótese que $t_1 = t_2$, porque la altura de la mesa en ambos casos es la misma.

Igualando la constante del resorte, tenemos

$$\frac{l_2^2}{x_2^2} = \frac{l_1^2}{x_1^2}$$

Con lo que obtenemos finalmente

$$x_2 = \frac{l_2}{l_1}x_1$$

Donde l_2 es la distancia para poder acertar.

Sustituyendo los valores correspondientes,

$$x_2 = \frac{2.2cm}{1.93cm}(1.1cm) = 1.25cm$$

Problema 1.33

Un bloque de 2.14kg se deja caer desde una altura de 43.6cm contra un resorte de constante de fuerza $k = 18.6\frac{N}{cm}$. Halle la distancia máxima de compresión del resorte.

Solución.

La energía del bloque en su posición inicial es (colocando el potencial cero en la parte superior del resorte en su posición de equilibrio)

$$E_i = mgl$$

La energía del sistema bloque-resorte justo cuando el bloque comprimió por completo al resorte es

$$E_f = -mgx_{máx} + \frac{1}{2}kx_{máx}^2$$

Donde $x_{máx}$ es la compresión máxima del resorte, la cual se consigue cuando el bloque llega al reposo. Aplicando conservación de la energía

$$mgl = -mgx_{máx} + \frac{1}{2}kx_{máx}^2$$

$$\frac{1}{2}kx_{máx}^2 - mgx_{máx} - mgl = 0$$

Sustituyendo valores se obtiene la siguiente ecuación cuadrática

$$930x_{máx}^2 - 20.9934x_{máx} - 9.153122 = 0$$

Cuyas soluciones son $x_{1máx} = 11.1cm$ y $x_{2máx} = -8.8cm$. Tomemos la solución $x_{1máx}$.

Problema 1.34

Una varilla delgada de longitud $L = 2.13m$ y de masa despreciable, está pivotada en un extremo de modo que puede girar en un círculo vertical. La varilla se separa en un ángulo $\theta = 35°$ y luego se suelta. ¿A qué velocidad se mueve la bola de plomo que está en el extremo de la varilla en su punto más bajo?

Solución.

Aplicando la conservación de la energía, colocando el potencial cero en el pivote, tenemos que la energía de la bola en su posición inicial es

$$E_i = -mgL\cos\theta$$

Y en su posición vertical

$$E_f = -mgL + \frac{1}{2}mv^2$$

Por lo que

$$-mgL\cos\theta = -mgL + \frac{1}{2}mv^2$$

$$\frac{1}{2}v^2 = gL - gL\cos\theta = gL(1-\cos\theta)$$

$$v = \sqrt{2gL(1-\cos\theta)}$$

Sustituyendo valores,

$$v = \sqrt{2\left(9.81\frac{m}{s^2}\right)(2.13m)(1-\cos 35°)} = 2.74\frac{m}{s}$$

2 UNIDAD TEMÁTICA II : Electrostática

Problema 2.1

Una carga Q va a ser dividida en dos partes, $Q-q$ y q. ¿Qué relación existe entre Q y q si las dos partes, separadas por cierta distancia, debe tener una repulsión de Coulomb máxima?

Solución:

La fuerza de repulsión según la ley de coulomb es:

$$|\vec{F}|= K\frac{q_1 q_2}{r^2} \equiv F(q)$$

Sustituyendo, las cargas de los fragmentos, tenemos

$$F(q) = K\frac{q(Q-q)}{r^2}$$

Para obtener la fuerza máxima de repulsión, busquemos el máximo de la función $F(q)$, imponiendo la condición:

$$\frac{dF(q)}{dq} = 0$$

Lo que nos conduce a

$$Q - 2q = 0$$

Por lo que

$$q = \frac{Q}{2}$$

Notando que

$$\frac{d^2F(q)}{dq^2} = -2 < 0$$

Garantizamos que $q = \frac{Q}{2}$ de lugar a un máximo en $F(q)$.

Problema 2.2

Dos cargas positivas de $+Q$ se sostienen fijas y separadas por una distancia d. Una partícula de carga $-q$ y de masa m se coloca a la mitad de distancia entre ellas y luego se le imprime un pequeño desplazamiento perpendicular a la línea que las une, liberándola después. Demuestre que la partícula describe un movimiento armónico simple y halle su periodo de oscilación.

Demostración:

La fuerza resultante sobre la carga –q es:

$$F_R = -2F_C sen\theta$$

Donde

$$F_C = K\frac{Qq}{x^2 + (\frac{d}{2})^2}$$

Aquí

x es el pequeño desplazamiento perpendicular a la línea que une a las cargas Q.

θ: es el ángulo entre la línea que une a las cargas Q y a la línea entre Q y q.

Sustituyendo la fuerza resultante sobre –q :

$$F_R = -2K\frac{Qq}{x^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2}\frac{x}{\sqrt{x^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2}}$$

Reduciendo:

$$F_R = -\frac{Qq}{2\pi\varepsilon_o}\frac{x}{\left(x^2 + \frac{d^2}{4}\right)^{3/2}}$$

Si d>>x podemos aproximar F_R a

$$F_R = \frac{4Qq}{\pi\varepsilon_o d^3}x$$

Ecuación del oscilador armónico simple.

El periodo de oscilación está dado por

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = \sqrt{\frac{m\varepsilon_o\pi^3 d^3}{Qq}}$$

Problema 2.3

Dos bolas pequeñas y similares de masa m se cuelgan de hilo de seda de longitud L y portan la misma carga q, debido a la repulsión de Coulomb, las bolas se separan una distancia x, por lo que los hilos forman un ángulo θ con respecto a la vertical. a)Demuestre que en el estado de equilibrio

$$x = \left(\frac{q^2 L}{2\pi\epsilon_0 mg}\right)^{1/3}$$

b) Si $L = 22cm$, $m = 11.2g$ y $x = 4.7\ cm$, ¿cuál es el valor de q?

a) Demostración:

Del análisis de fuerzas

$$\mathrm{Tsen}\theta - F_c = 0$$

$$\mathrm{Tcos}\theta - mg = 0$$

Donde F_c es la fuerza coulombiana, eliminando a la tensión

$$\frac{F_c}{mg} = tan\theta \approx sen\theta = \frac{x}{2L}$$

Suponiendo que $\theta \ll 1$.

De donde:

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_o mg}\frac{q^2}{x^2} \approx \frac{x}{2L}$$

Finalmente

$$x = \left(\frac{q^2 L}{2\pi\varepsilon_o mg}\right)^{\frac{1}{3}}$$

b)Tenemos que

$$q = \sqrt{\frac{2\pi\varepsilon_o mgx^3}{L}} = \sqrt{\frac{mgx^3}{2kL}} = \sqrt{\frac{(0.0112Kg)(9.81\frac{m}{s^2})(0 - 047m)^3}{2\left(8.99x10^9 N\frac{m^2}{c^2}\right)(1.22m)}}$$

$$q = 2.28x10^{-8}c$$

Problema 2.4

a) Calcule el campo eléctrico de un disco cargado uniformemente de radio R con σ su densidad de carga, sobre un punto en el eje Z perpendicular al plano XY en que se encuentre el disco centrado en el origen del sistema de referencia.
b) Demuestre que el campo eléctrico se reduce al de una carga puntual cuando Z<<R

a) Demostración.

Tenemos que el campo eléctrico resultante sobre el punto en el eje Z es:

$$dE_R = 2dEsen\theta$$

Con

$$dE = K\frac{dq}{r'^2}$$

r': la distancia entre un punto arbitrario del disco y el punto en el eje Z

θ: el ángulo entre r' y el disco

En términos de la densidad de carga

$$\sigma = \frac{dq}{dA}$$

Haciendo esta sustitución

$$dE_R = 2K\sigma\frac{dA}{r^2+Z^2}\frac{Z}{\sqrt{r^2+Z^2}}$$

En coordenadas cilíndricas

$$dE_R = 2\pi K\sigma Z\frac{2r}{(r^2+Z^2)^{\frac{3}{2}}}dr$$

Por lo que

$$E_R = \frac{\sigma Z}{2\varepsilon_o}\int_o^R \frac{2r}{(r^2+Z^2)^{\frac{3}{2}}}dr$$

Integrando sobre todo el disco

$$E_{Rz} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_o}\left(1-\frac{Z}{\sqrt{r^2+Z^2}}\right)$$

a lo largo del eje Z positivo.

$b) E_R$ se puede escribir como:

$$E_R = \frac{\sigma}{2\varepsilon_o}\left[1 - \frac{Z}{R}\left(1 + \frac{Z^2}{R^2}\right)^{-1/2}\right]$$

Haciendo un desarrollo

$$E_R = \frac{\sigma}{2\varepsilon_o}\left(1 - \frac{Z}{R} + \frac{Z^2}{2R^2} + \cdots\right)$$

Puesto que Z<<R, entonces $\frac{Z}{R}$<<1, con lo cual

$$E_R \approx \frac{\sigma}{2\varepsilon_o}$$

Que es el caso puntual.

Problema 2.5

Una varilla aislante "semi-infinita" transporta una carga constante por unidad de longitud λ. Demuestre que el campo eléctrico en el punto P, colocado a una distancia R perpendicular al extremo de la varilla, forma un ángulo de 45° con ella y que este resultado no depende de R.

Demostración:

Calculamos el campo eléctrico debido a un diferencial de carga dq, ubicado a una distancia x del extremo de la varilla.

$$dE = K\frac{dq}{r^2}$$

Donde r es la distancia entre la varilla y el punto P, por lo que:

$$dE = K\lambda\frac{dx}{x^2+R^2}$$

En donde R es la distancia del extremo de la varilla al punto P.

Las componentes del diferencial del campo eléctrico son

$$dE_y = K\lambda\frac{dx}{x^2+R^2}sen\theta = K\lambda R\frac{dx}{(x^2+R^2)^{3/2}}$$

$$dE_x = K\lambda\frac{dx}{x^2+R^2}cos\theta = K\lambda\frac{x}{(x^2+R^2)^{3/2}}dx$$

Donde θ es el ángulo entre la varilla y r.

Las componentes del campo eléctrico son

$$E_y = K\lambda R \int_o^{\infty} \frac{dx}{(x^2+R^2)^{3/2}}$$

$$E_X = K\lambda \int_0^{\infty} \frac{x}{(x^2+R^2)^{3/2}} dx$$

Para hallar la dirección del campo eléctrico resultante se tiene que:

$$tan\theta = \frac{E_y}{E_x} = \frac{K\lambda R \int_o^{\infty} \frac{dx}{(x^2+R^2)^{3/2}}}{K\lambda \int_o^{\infty} \frac{x}{(x^2+R^2)^{3/2}} dx}$$

Integrando:

$$tan\theta = \frac{\frac{1}{R} \frac{x}{\sqrt{R^2+x^2}} \big|_o^{\infty}}{-\frac{1}{\sqrt{R^2+x^2}} \big|_o^{\infty}} = \frac{\frac{1}{R}}{\frac{1}{R}} = 1$$

En consecuencia

$$tan\theta = 1$$

$$\theta = 45°$$

Problema 2.6

Considere una distribución de carga, distribuida uniformemente en una esfera de radio R. Halle el campo eléctrico en puntos fuera de la esfera y puntos dentro de ella.

Solución:

Caso r<R

Considerando una esfera concéntrica de radio r<R a la distribución volumétrica de carga tenemos:

$$\varepsilon_o \int \vec{E} \cdot d\vec{A} = q$$

$$\varepsilon_o E(4\pi r^2) = q$$

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q}{r^2}, \quad r > R$$

Donde q es la carga encerrada dentro de la distribución de la carga.

Caso $r > R$.

De la ley de Gauss

$$\varepsilon_o \int \vec{E} \cdot d\vec{A} = q'$$

Aquí q' es la carga encerrada por la superficie Gaussiana.

Suponiendo que la densidad volumétrica de carga es constante

$$\rho = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{q'}{\frac{4}{3}\pi r^3}$$

De donde

$$q' = \frac{q}{R^3} r^3$$

Sustituyendo en la ley de Gauss

$$\varepsilon_o E(4\pi r^2) = \frac{q}{R^3} r^3$$

finalmente

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{qr}{R^3}, \text{ r<R}$$

Problema 2.7

Calcule el campo eléctrico de una línea infinita con una densidad constante de carga lineal positiva a una distancia r de la línea.

Solución.

El problema presenta simetría cilíndrica, lo que nos sugiere escoger un cilindro como superficie gaussiana para este problema.

Sea un cilindro de radio r y altura h. El campo eléctrico E es constante en la superficie del cilindro y perpendicular a ella. El flujo a través de esta superficie es

$$E(2\pi rh)$$

En las tapas del cilindro $\vec{E} \cdot d\vec{A} = 0$.

La carga encerrada por la superficie gaussiana es $q = \lambda h$.

Aplicando la Ley de Gauss, tenemos

$$\epsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = q$$

$$\epsilon_0 E(2\pi rh) = \lambda h$$

Con lo que obtenemos

$$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

Problema 2.8

Considere una hoja delgada infinita no conductora cargada con una densidad constante de carga superficial positiva σ. Calcule el campo eléctrico en puntos cercanos a la hoja.

Solución.

Consideremos un cilindro cerrado de superficie A, dispuesto de modo que atraviesa el plano de la hoja.

Dado que $\vec{E}$ no traspasa la superficie cilíndrica, no contribuye al flujo proveniente de la pared curva del cilindro.

Aplicando la Ley de Gauss

$$\epsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = q$$

$$\epsilon_0 (EA + EA) = \sigma A$$

En donde hemos supuesto que las tapas externas del cilindro equidistan de la hoja y σA es la carga encerrada.

Finalmente obtenemos

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

El campo eléctrico es constante en todos los puntos de los lados de la hoja.

Problema 2.9

Considere un anillo uniforme con distribución lineal de carga λ constante. Calcule el potencial en un punto sobre el eje z y a partir de él halle el campo eléctrico.

Solución.

El potencial debido a dq en el punto z es

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dq}{r}$$

Donde r es la distancia de dq al punto z. Así,

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda R d\theta}{\sqrt{R^2 + z^2}}$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda R}{\sqrt{R^2 + z^2}}\int_0^{2\pi} d\theta$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2\pi\lambda R}{\sqrt{R^2 + z^2}} = \frac{\lambda R}{2\epsilon_0}\frac{1}{\sqrt{R^2 + z^2}}$$

Para hallar el campo eléctrico tenemos que

$$E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

$$E_z = -\frac{\lambda R}{2\epsilon_0}\frac{\partial}{\partial z}(R^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{\lambda R}{2\epsilon_0}\frac{1}{2}(2z)(R^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} = \frac{\lambda}{2\epsilon_0}\frac{Rz}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

con lo que obtenemos finalmente

$$E_z = \frac{\lambda}{2\epsilon_0}\frac{Rz}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

El campo eléctrico está en la dirección z.

3 UNIDAD TEMÁTICA III: Magnetostática

Problema 3.1

Halle la velocidad angular ω y la frecuencia ν de un haz de electrones de carga q que giran por una cámara al vacío donde hay un campo magnético uniforme $\vec{B}$ hacia afuera del plano de la cámara.

Solución.

Puesto que $\vec{B}$ es perpendicular a la velocidad v del haz, la fuerza es

$$F = qvB$$

Por segunda Ley de Newton,

$$qvB = ma = m\frac{v^2}{r}$$

De donde

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{qB}{m}$$

Y la frecuencia ν es

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi}\frac{qB}{2\pi m}$$

Problema 3.2

Halle la magnitud de la fuerza que actúa sobre una partícula de carga q_0, que viaja en dirección x positiva y velocidad v_0, sometida a un campo magnético $\vec{B} = B_y\hat{\jmath} + B_z\hat{k}$ y un campo eléctrico $\vec{E} = E_x\hat{\imath}$, donde B_y, B_z y E_x son constantes.

Solución.

La fuerza de Lorentz es

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$$

Calculemos

$$\vec{v} \times \vec{B} = v_0\hat{\imath} \times \left(B_y\hat{\jmath} + B_z\hat{k}\right) = v_0 B_y\hat{k} - v_0 B_z\hat{\jmath}$$

Sustituyendo

$$\vec{F} = q_0 E_x\,\hat{\imath} - q_0 v_0 B_z \hat{\jmath} + q_0 v_0 B_y \hat{k}$$

La magnitud de la fuerza es

$$|\vec{F}| = \sqrt{q_0^2 E_x^2 + q_0^2 v_0^2 B_z^2 + q_0^2 v_0^2 B_y^2}$$

$$|\vec{F}| = q_0 \sqrt{E_x^2 + v_0^2 B_z^2 + v_0^2 B_y^2}$$

Problema 3.3

Calcula el campo magnético creado por una corriente i en un segmento de alambre recto de longitud L, a una distancia perpendicular al alambre.

Solución:

Sea el eje z la dirección de la corriente y $\vec{r}$ el vector de posición del punto z al punto P de interés.

De la ley de Biot-Savart tenemos

$$\vec{B} = \frac{\mu_o}{4\pi} \int \frac{i\,\overrightarrow{ds} \times \vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_o i}{4\pi} \int \frac{ds sen\theta}{r^2}$$

Con ds = dz , vector en dirección de i y θ el ángulo etre $\overrightarrow{ds}$ y $\vec{r}$ además

$$sen\theta = \frac{d}{\sqrt{z^2+d^2}}$$

Sustituyendo

$$\vec{B} = \frac{\mu_o i}{4\pi} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{d}{(z^2+d^2)^{\frac{3}{2}}} dz$$

Integrando y valuando en los límites, obtenemos:

$$B = \frac{\mu_o i}{4\pi} \frac{L}{(\frac{L^2}{4} + d^2)^{\frac{1}{2}}}$$

Si L >>d, tenemos que

$$B = \frac{\mu_o i}{4\pi d}$$

Problema 3.4

Un segmento recto y horizontal de alambre de cobre transporta una corriente i=28A. ¿Qué magnitud y dirección debe tener el campo magnético para que el alambre quede en equilibrio con su peso? Su densidad lineal de masa es $46.6\frac{g}{m}$.

Solución:

Si el campo magnético es perpendicular al segmento y a la dirección del peso, la dirección de la fuerza magnética es de dirección opuesta al peso, esto es:

$$\vec{F} = i\vec{L} \times \vec{B} = iLBsen90 = iLB$$

Considerando que la dirección del campo magnético es perpendicular al alambre.

Para que el segmento esté en equilibrio

$$iLB - mg = ma = 0$$

De donde:

$$B = \frac{mg}{iL} = \left(\frac{m}{L}\right)\frac{g}{i}$$

Sustituyendo

$$B = \left(0.0466\frac{Kg}{m}\right)\frac{9.81\frac{m}{s^2}}{28A}$$

$$B = 0.0161T$$

Problema 3.5

Considere un alambre largo y recto. Aplicar la ley de Ampére para determinar el campo magnético a una distancia d perpendicular al alambre.

Solución:

Consideremos como espira un círculo de radio d centrado en el alambre, con su plano perpendicular a él.

Al escoger una trayectoria que en todas partes esté a la misma distancia del alambre sabemos que el campo magnético B es constante alrededor de la trayectoria, puesto que B tiene solo componente tangencial el ángulo θ entre $\overrightarrow{ds}$ y $\vec{B}$ es cero y la ley de Ampére se convierte en

$$\int Bdscos\theta = B\int ds = B(2\pi d) = \mu_0 i$$

Por lo que la solución es

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi d}$$

Cabe mencionar que este resultado también se puede obtener de la ley de Biot-Savart, sin embargo nótese lo sencillo que resulta obtener este resultado a partir de la ley de Apére.

Problema 3.6

Considere un alambre largo y recto, aplicar la ley de Ampére para calcular el campo magnético dentro del alambre.

Solución:

Determinemos el campo magnético a una distancia $r < R$, donde R es el radio del alambre.

Consideremos nuestra espira circular dentro del alambre. La simetría indica que B tiene magnitud constante en toda la trayectoria.

Aplicando la ley de Ampére

$$\int \vec{B} \cdot \overrightarrow{ds} = \mu_0 i$$

Lo que se reduce a

$$B(2\pi r) = \mu_0 i \frac{\pi r^2}{\pi R^2}$$

Con lo que obtenemos

$$B = \frac{\mu_0 i r}{2\pi R^2}$$

Para puntos tales que $r < R$.

BIBLIOGRAFÍA

[1] Raynmond A. Serway y Robert J. Beichner. Física para las ciencias e ingeniería, Tomo I, 5a., Ed., Mc Graw Hill, 2002.

[2] Francis W. Sears, Mark W. Zemansky Hugh D. Young y Roger A. Freedman. Física Universitaria, Vol. 1, 11a. Ed., Pearson, 1998.

[3] Robert Resnick, David Holliday y Kenneth S. Krane. Física, Vol. 1, 4a. Ed., Compañía editorial continental, 1991.