$$\frac{< \mid >}{< \mid >}$$

PROBLEMAS RESUELTOS DE ÁLGEBRA LINEAL

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

ESCUELA SUPERIOR DE CÓMPUTO

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS

FLORENCIO GUZMÁN AGUILAR

$$\frac{<|>}{<|>}$$

Problema 1.1: Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales.

$$\textbf{i)}\ \begin{array}{r} 2x+y-2z=10 \\ -6x-4y-4z=-2 \\ 5x+4y+3z=4 \end{array} \qquad \textbf{ii)}\ \begin{array}{r} x_1+x_2-2x_3+3x_4=4 \\ 2x_1+3x_2+3x_3-x_4=3 \\ 5x_1+7x_2+4x_3+x_4=5 \end{array} \qquad \textbf{iii)}\ \begin{array}{r} x+y-2z+4w=5 \\ 2x+2y-3z+w=3 \\ 3x+3y-4z-2w=1 \end{array}$$

Solución:

$$\textbf{i)} \quad \begin{array}{r} 2x+y-2z=10 \\ -6x-4y-4z=-2 \\ 5x+4y+3z=4 \end{array} \quad \begin{array}{r} (R_2+3R_1\to R_2) \\ (2R_3-5R_1\to R_3) \end{array} \quad \begin{array}{r} 2x+y-2z=10 \\ -y-10z=28 \\ 3y+16z=-42 \end{array}$$

$$(R_3+3R_2\to R_3) \quad \begin{array}{r} 2x+y-2z=10 \\ -y-10z=28 \\ -14z=42 \end{array} \quad \begin{array}{r} (R_1/2\to R_1) \\ (-R_2\to R_2) \\ (-R_3/14\to R_3) \end{array} \quad \begin{array}{r} x+y/2-z=5 \\ y+10z=-28 \\ z=-3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} (R_1+R_3\to R_1) \\ (R_2-10R_3\to R_2) \end{array} \quad \begin{array}{r} x+y/2=2 \\ y=2 \\ z=-3 \end{array} \quad (R_1-R_2/2\to R_1) \quad \begin{array}{r} x=1 \\ y=2 \\ z=-3 \end{array} \quad \text{solución única}$$

$$\textbf{ii)} \quad \begin{array}{r} x_1+x_2-2x_3+3x_4=4 \\ 2x_1+3x_2+3x_3-x_4=3 \\ 5x_1+7x_2+4x_3+x_4=5 \end{array} \quad \begin{array}{r} (R_2-2R_1\to R_2) \\ (R_3-5R_1\to R_3) \end{array} \quad \begin{array}{r} x_1+x_2-2x_3+3x_4=4 \\ x_2+7x_3-7x_4=-5 \\ 2x_2+14x_3-14x_4=-15 \end{array}$$

$$(R_3-2R_2\to R_3) \quad \begin{array}{r} x_1+x_2-2x_3+3x_4=4 \\ x_2+7x_3-7x_4=-5 \\ 0=5 \end{array} \quad \text{sin solución}$$

$$\textbf{iii)} \quad \begin{array}{r} x+y-2z+4w=5 \\ 2x+2y-3z+w=3 \\ 3x+3y-4z-2w=1 \end{array} \quad \begin{array}{r} (R_2-2R_1\to R_2) \\ (R_3-3R_1\to R_3) \end{array} \quad \begin{array}{r} x+y-2z+4w=5 \\ z-7w=-7 \\ 2z-14w=-14 \end{array}$$

$$(R_3-2R_2\to R_3) \quad \begin{array}{r} x+y-2z+4w=5 \\ z-7w=-7 \\ 0=0 \end{array} \quad \begin{array}{l} R_1\Rightarrow x=5-y+2z-4w \\ R_2\Rightarrow z=7w-7 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} y=\alpha\in\mathbf{R} \\ w=\beta\in\mathbf{R} \end{array} \quad \text{parámetros libres} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} x=5-\alpha+10\beta-14 \\ y=\alpha \\ z=7\beta-7 \\ w=\beta \end{array} \quad \text{soluciones infinitas}$$

$$\frac{<\,|\,>}{<\,|\,>}$$

Problema 1.2: Para que valores del parámetro k, el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

i) tiene solución única.
ii) no tiene solución.
iii) tiene soluciones infinitas.

$$\begin{aligned} kx + y + z &= 1 \\ x + ky + z &= 1 \\ x + y + kz &= 1 \end{aligned}$$

Solución:

$$\begin{array}{lcr} kx + y + z = 1 & & x + y + kz = 1 \\ x + ky + z = 1 & (R_1 \leftrightarrow R_3) & x + ky + z = 1 \\ x + y + kz = 1 & & kx + y + z = 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rr} (R_2 - R_1 \to R_2) & x + y + kz = 1 \\ (R_3 - kR_1 \to R_3) & (k-1)y + (1-k)z = 0 \\ & (1-k)y + (1-k^2)z = 1-k \end{array}$$

$$\begin{array}{lr} & x + y + kz = 1 \\ (R_3 + R_2 \to R_3) & (k-1)y + (1-k)z = 0 \\ & ((1-k) + (1-k^2))z = 1-k \end{array}$$

$$-R_3 \quad \Rightarrow \quad (k^2 + k + 2)z = k - 1 \quad \Rightarrow \quad (k+2)(k-1)z = k-1$$

De esta última ecuación inferimos los siguientes resultados para la solución,

i) tiene solución única si

$$(k+2)(k-1) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad k \neq -2 \quad \text{y} \quad k \neq 1$$

ii) no tiene solución si

$$(k+2)(k-1) = 0 \quad \text{y} \quad k - 1 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad k = -2 \quad \text{y} \quad k \neq 1$$

iii) tiene soluciones infinitas si

$$(k+2)(k-1) = 0 \quad \text{y} \quad k - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad k = -2 \quad \text{y} \quad k = 1$$

$$\frac{<\,|\,>}{<\,|\,>}$$

Problema 1.3: Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales homogeneos.

$$\textbf{i)}\ \begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 &= 0\\ 3x_1 - x_3 + 5x_4 &= 0\\ 4x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 9x_4 &= 0\\ x_1 + 7x_4 &= 0 \end{aligned} \qquad \textbf{ii)}\ \begin{aligned} -x + 6w &= 0\\ 2y - z + 13w &= 0\\ 2x - z + 11w &= 0\\ 2x + 2y - 2z + 24w &= 0 \end{aligned}$$

Solución:

$$\textbf{i)}\ \begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 &= 0\\ 3x_1 - x_3 + 5x_4 &= 0\\ 4x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 9x_4 &= 0\\ x_1 + 7x_4 &= 0 \end{aligned} \quad \begin{matrix} (R_2 - 3R_1 \to R_2)\\ (R_3 - 4R_1 \to R_3)\\ (R_4 - R_1 \to R_4) \end{matrix} \quad \begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 &= 0\\ -6x_2 + 2x_3 - 7x_4 &= 0\\ -6x_2 + 10x_3 - 7x_4 &= 0\\ -2x_2 + x_3 + 3x_4 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{matrix} (R_3 - R_2 \to R_3)\\ (3R_4 - R_2 \to R_4) \end{matrix} \quad \begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 &= 0\\ -6x_2 + 2x_3 - 7x_4 &= 0\\ 8x_3 &= 0\\ -7x_3 + 16x_4 &= 0 \end{aligned} \quad (R_3/8 \leftrightarrow R_3) \quad \begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 &= 0\\ -6x_2 + 2x_3 - 7x_4 &= 0\\ x_3 &= 0\\ -7x_3 + 16x_4 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{matrix} (R_1 + R_3 \to R_1)\\ (R_2 - 2R_3 \to R_2)\\ (R_4 + 7R_3 \to R_4) \end{matrix} \quad \begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 4x_4 &= 0\\ -6x_2 - 7x_4 &= 0\\ x_3 &= 0\\ 16x_4 &= 0 \end{aligned} \quad (R_4/16 \to R_4) \quad \begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 4x_4 &= 0\\ -6x_2 - 7x_4 &= 0\\ x_3 &= 0\\ x_4 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{matrix} (R_1 - 4R_4 \to R_1)\\ (R_2 + 7R_4 \to R_2) \end{matrix} \quad \begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 0\\ -6x_2 &= 0\\ x_3 &= 0\\ x_4 &= 0 \end{aligned} \quad (-R_2/6 \to R_2) \quad \begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 0\\ x_2 &= 0\\ x_3 &= 0\\ x_4 &= 0 \end{aligned}$$

$$(R_1 - 2R_4 \to R_2) \quad \begin{aligned} x_1 &= 0\\ x_2 &= 0\\ x_3 &= 0\\ x_4 &= 0 \end{aligned} \quad \text{solución única}$$

$$\textbf{ii)}\ \begin{aligned} -x + 6w &= 0\\ 2y - z + 13w &= 0\\ 2x - z + 11w &= 0\\ 2x + 2y - 2z + 24w &= 0 \end{aligned} \quad \begin{matrix} (R_3 - 2R_1 \to R_3)\\ (R_4 - 2R_1 \to R_4) \end{matrix} \quad \begin{aligned} -x + 6w &= 0\\ 2y - z + 13w &= 0\\ -z - w &= 0\\ 2y - 2z + 12w &= 0 \end{aligned}$$

$$(R_4 - R_2 \to R_4) \quad \begin{aligned} -x + 6w &= 0\\ 2y - z + 13w &= 0\\ -z - w &= 0\\ -z - w &= 0 \end{aligned} \quad \begin{matrix} (R_2 - R_3 \to R_2)\\ (R_4 - R_3 \to R_4) \end{matrix} \quad \begin{aligned} -x + 6w &= 0\\ 2y + 14w &= 0\\ -z - w &= 0\\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_1 &\Rightarrow x = 6w\\ R_2 &\Rightarrow y = -7w\\ R_3 &\Rightarrow z = -w \end{aligned} \qquad w = \alpha \in \mathbf{R} \quad \text{parámetro libre} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x &= 6\alpha\\ y &= -7\alpha\\ z &= -\alpha\\ w &= \alpha \end{aligned} \quad \text{soluciones infinitas}$$

$$\frac{<\,|\,>}{<\,|\,>}$$

Problema 1.4: Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones lineales usando la matriz aumentada.

$$\textbf{i)}\quad \begin{aligned} x_1+2x_2-3x_3-2x_4+4x_5&=1\\ 2x_1+5x_2-8x_3-x_4+6x_5&=4\\ x_1+4x_2-7x_3-5x_4+2x_5&=8 \end{aligned} \qquad \textbf{ii)}\quad \begin{aligned} x+2y-z&=3\\ x+3y+z&=5\\ 3x+8y+4z&=17 \end{aligned}$$

Solución:

$$\textbf{i)}\ \left(\begin{array}{ccccc|c} 1&2&-3&-2&4&1\\ 2&5&-8&-1&6&4\\ 1&4&-7&-5&2&8 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l}(R_2-2R_1\to R_2)\\(R_3-R_1\to R_3)\end{array} \quad \left(\begin{array}{ccccc|c} 1&2&-3&-2&4&1\\ 0&1&-2&3&-2&2\\ 0&2&-4&-3&-2&7 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l}(R_1-2R_2\to R_1)\\(R_3-2R_2\to R_3)\end{array} \quad \left(\begin{array}{ccccc|c} 1&0&1&-8&8&-3\\ 0&1&-2&3&-2&2\\ 0&0&0&-9&2&3 \end{array}\right)$$

$$(-R_3/9\to R_3) \quad \left(\begin{array}{ccccc|c} 1&0&1&-8&8&-3\\ 0&1&-2&3&-2&2\\ 0&0&0&1&-2/9&-1/3 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l}(R_1+8R_3\to R_1)\\(R_2-3R_3\to R_2)\end{array} \quad \left(\begin{array}{ccccc|c} 1&0&1&0&56/9&-17/3\\ 0&1&-2&0&-12/9&3\\ 0&0&0&1&-2/9&-1/3 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} R_1\Rightarrow x_1=-17/3-x_3-56/9x_5\\ R_2\Rightarrow x_2=3+2x_3+12/9x_5\\ R_3\Rightarrow x_4=-1/3+2/9x_5 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x_3=\alpha\in\mathbf{R}\\ x_5=\beta\in\mathbf{R}\end{array}\ \text{parámetros libres} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} x_1=-17/3-\alpha-56/9\beta\\ x_2=3+2\alpha+12/9\beta\\ x_3=\alpha\\ x_4=-1/3+2/9\beta\\ x_5=\beta \end{array} \qquad \text{soluciones infinitas}$$

$$\textbf{ii)}\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1&2&-1&3\\ 1&3&1&5\\ 3&8&4&17 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l}(R_2-R_1\to R_2)\\(R_3-3R_1\to R_3)\end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1&2&-1&3\\ 0&-1&-2&-2\\ 0&2&7&8 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l}(R_1+2R_2\to R_1)\\(R_3+2R_2\to R_3)\end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1&0&-5&-1\\ 0&-1&-2&-2\\ 0&0&3&4 \end{array}\right)$$

$$R_3/3\to R_3) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1&0&-5&-1\\ 0&-1&-2&-2\\ 0&0&1&4/3 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l}(R_1+5R_3\to R_1)\\(R_2+2R_3\to R_2)\end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1&0&0&17/3\\ 0&-1&0&2/3\\ 0&0&1&4/3 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} x=17/3\\ y=-2/3\\ z=4/3 \end{array} \quad \text{solución única}$$

$$\frac{<|>}{<|>}$$

Problema 1.5: Considere los siguientes sistemas de ecuaciones lineales. Que condicones deben de satisfacer los parámetros, k_1, k_2, k_3, m y n, para que el sistema
a) Tenga solución única.
b) No tenga solución.
c) Tenga un número infinito de soluciones.

$$\textbf{i)}\quad \begin{aligned} 2x_1+2x_2+4x_3&=2k_1\\ x_1+x_3&=k_2\\ 2x_1+x_2+3x_3&=k_3 \end{aligned} \qquad \textbf{ii)}\quad \begin{aligned} x-2y+3z&=11\\ 2x-y+3z&=10\\ 4x+y+(m-1)z&=4+n \end{aligned}$$

Solución:

$$\textbf{i)}\quad \begin{aligned} 2x_1+2x_2+4x_3&=2k_1\\ x_1+x_3&=k_2\\ 2x_1+x_2+3x_3&=k_3 \end{aligned} \qquad (R_1/2\to R_1) \qquad \begin{aligned} x_1+x_2+2x_3&=k_1\\ x_1+x_3&=k_2\\ 2x_1+x_2+3x_3&=k_3 \end{aligned}$$

$$\begin{matrix}(R_2-R_1\to R_2)\\(R_3-2R_1\to R_3)\end{matrix} \qquad \begin{aligned} x_1+x_2+2x_3&=k_1\\ -x_2-x_3&=k_2-k_1\\ -x_2-x_3&=k_3-2k_1 \end{aligned}$$

$$(R_3-R_2\to R_3) \qquad \begin{aligned} x_1+x_2+2x_3&=k_1\\ -x_2-x_3&=k_2-k_1\\ 0&=k_3-k_2-k_1 \end{aligned}$$

a) El sistema no puede tener solución única.
b) El sistema no tiene solución si

$$k_3-k_2-k_1\neq 0$$

b) El sistema tiene un número infinito de soluciones si

$$k_3-k_2-k_1=0$$

$$\textbf{ii)}\quad \begin{aligned} x-2y+3z&=11\\ 2x-y+3z&=10\\ 4x+y+(m-1)z&=4+n \end{aligned} \qquad \begin{matrix}(R_2-2R_1\to R_2)\\(R_3-4R_1\to R_3)\end{matrix} \qquad \begin{aligned} x-2y+3z&=11\\ 3y-3z&=-12\\ 9y+(m-13)z&=n-40 \end{aligned}$$

$$(R_3-3R_2\to R_3) \qquad \begin{aligned} x-2y+3z&=11\\ 3y-3z&=-12\\ (m-4)z&=n-4 \end{aligned}$$

a) El sistema tiene solución única si

$$m-4\neq 0 \quad \text{y} \quad n-4\neq 0$$

b) El sistema no tiene solución si

$$m-4=0 \quad \text{y} \quad n-4\neq 0$$

b) El sistema tiene un número infinito de soluciones si

$$m-4=0 \quad \text{y} \quad n-4=0$$

$$\frac{<|>}{<|>}$$

Problema 1.6: Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones lineales homogéneos usando la matriz aumentada.

$$\textbf{i)}\quad \begin{aligned} x+2y-3z+4t&=2\\ 2x+5y-2z+t&=1\\ 5x+12y-7z+6t&=7 \end{aligned} \qquad\qquad \textbf{ii)}\quad \begin{aligned} 2x+4y-z&=0\\ x+y-z&=0\\ 3x+2y+2z&=0 \end{aligned}$$

Solución:

$$\textbf{i)}\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 & 2\\ 2 & 5 & -2 & 1 & 1\\ 5 & 12 & -7 & 6 & 7 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l}(R_2-2R_1\to R_2)\\(R_3-5R_1\to R_3)\end{array} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 & 1\\ 0 & 1 & 4 & -7 & -3\\ 0 & 2 & 8 & -14 & -3 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l}(R_1-2R_2\to R_1)\\(R_3-2R_2\to R_3)\end{array} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -11 & 18 & 7\\ 0 & 1 & 4 & -7 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

El sistema no tiene solución.

$$\textbf{ii)}\ \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & -1 & 0\\ 1 & 1 & -1 & 0\\ 3 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right) \quad R_1\leftrightarrow R_2 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0\\ 2 & 4 & -1 & 0\\ 3 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l}(R_2-2R_1\to R_2)\\(R_3-3R_1\to R_3)\end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 2 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 5 & 0 \end{array}\right)$$

$$(R_2/2\to R_2) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 1/2 & 0\\ 0 & -1 & 5 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l}(R_1-R_2\to R_1)\\(R_3+R_2\to R_3)\end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1/2 & 0\\ 0 & 1 & 1/2 & 0\\ 0 & 0 & 11/2 & 0 \end{array}\right)$$

$$(2R_3/11\to R_3) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1/2 & 0\\ 0 & 1 & 1/2 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l}(R_1+R_3/2\to R_1)\\(R_2-R_3/2\to R_2)\end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ll} x=0 & \\ y=0 & \quad \text{solución única}\\ z=0 & \end{array}$$

$$\frac{<\,|\,>}{<\,|\,>}$$

Problema 1.7: Encuentre el determinante de cada una de las siguientes matrices, usando el desarrollo en cofactores.

$$\textbf{i)}\ \mathbf{A}=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 5\\ 4 & -1 & 3\\ -1 & -1 & 4\end{pmatrix}\qquad \textbf{ii)}\ \mathbf{B}=\begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 & 3\\ -3 & 0 & -1 & 2\\ 2 & 2 & 4 & 0\\ -6 & 1 & 2 & -4\end{pmatrix}$$

Solución:

i) Desarrollamos en cofactores con respecto de la fila uno, esto es,

$$|\mathbf{A}|=\begin{vmatrix} -2 & 1 & 5\\ 4 & -1 & 3\\ -1 & -1 & 4\end{vmatrix}=(-2)\begin{vmatrix} -1 & 3\\ -1 & 4\end{vmatrix}-(1)\begin{vmatrix} 4 & 3\\ -1 & 4\end{vmatrix}+(5)\begin{vmatrix} 4 & -1\\ -1 & -1\end{vmatrix}$$

$$=(-2)(-4+3)-(1)(16+3)+(5)(-4-1)$$

$$=2-19-25=-42$$

ii) Desarrollamos en cofactores con respecto de la fila dos, esto es,

$$|\mathbf{B}|=\begin{vmatrix} 5 & 1 & 4 & 3\\ -3 & 0 & -1 & 2\\ 2 & 2 & 4 & 0\\ -6 & 1 & 2 & -4\end{vmatrix}$$

$$=-(-3)\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3\\ 2 & 4 & 0\\ 1 & 2 & -4\end{vmatrix}+(0)\begin{vmatrix} 5 & 4 & 3\\ 2 & 4 & 0\\ -6 & 2 & -4\end{vmatrix}-(-1)\begin{vmatrix} 5 & 1 & 3\\ 2 & 2 & 0\\ -6 & 1 & -4\end{vmatrix}+(2)\begin{vmatrix} 5 & 1 & 4\\ 2 & 2 & 4\\ -6 & 1 & 2\end{vmatrix}$$

$$=(3)\left[(-2)\begin{vmatrix} 4 & 3\\ 2 & -4\end{vmatrix}+(4)\begin{vmatrix} 1 & 3\\ 1 & -4\end{vmatrix}-(0)\begin{vmatrix} 1 & 4\\ 1 & 2\end{vmatrix}\right]$$

$$+(1)\left[(-2)\begin{vmatrix} 1 & 3\\ 1 & -4\end{vmatrix}+(2)\begin{vmatrix} 5 & 3\\ -6 & -4\end{vmatrix}-(0)\begin{vmatrix} 5 & 1\\ -6 & 1\end{vmatrix}\right]$$

$$+(2)\left[(5)\begin{vmatrix} 2 & 4\\ 1 & 2\end{vmatrix}-(1)\begin{vmatrix} 2 & 4\\ -6 & 2\end{vmatrix}+(4)\begin{vmatrix} 2 & 2\\ -6 & 1\end{vmatrix}\right]$$

$$=(3)\left[(-2)(-21)+(4)(-7)\right]+\left[(-2)(-7)+(2)(-2)\right]+(2)\left[(5)(0)-(1)(28)+(4)(14)\right]$$

$$=(3)(14)+(10)+(2)(28)$$

$$=42+10+56=108$$

$$\frac{<|>}{<|>}$$

Problema 1.8: Encuentre el determinante de cada una de las siguientes matrices, usando las propiedades de los determinantes.

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 & 0 & 5\\ 2 & 1 & 1 & -2 & 1\\ 1 & 1 & 2 & -2 & 3\\ 3 & 0 & 2 & 3 & -1\\ -1 & -1 & -3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B}=\begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 & -2\\ -2 & -3 & 2 & -5\\ 1 & 3 & -2 & 2\\ -1 & -6 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$|\mathbf{A}|=\begin{vmatrix} 6 & 2 & 1 & 0 & 5\\ 2 & 1 & 1 & -2 & 1\\ 1 & 1 & 2 & -2 & 3\\ 3 & 0 & 2 & 3 & -1\\ -1 & -1 & -3 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{matrix}(R_1-2R_2\to R_1)\\(R_3-R_2\to R_3)\\(R_5+R_2\to R_5)\end{matrix}\qquad |\mathbf{A}|=\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & 4 & 3\\ 2 & 1 & 1 & -2 & 1\\ -1 & 0 & 1 & 0 & 2\\ 3 & 0 & 2 & 3 & -1\\ 1 & 0 & -2 & 2 & 3 \end{vmatrix}=(1)\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 & 3\\ -1 & 1 & 0 & 2\\ 3 & 2 & 3 & -1\\ 1 & -2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{matrix}(C_1+C_2\to C_1)\\(C_4-2C_2\to C_4)\end{matrix}\qquad |\mathbf{A}|=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 & 5\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 5 & 2 & 3 & -5\\ -1 & -2 & 2 & 7 \end{vmatrix}=(1)\begin{vmatrix} 1 & 4 & 5\\ 5 & 3 & -5\\ -1 & 2 & 7 \end{vmatrix}$$

$$\begin{matrix}(R_2-5R_1\to R_2)\\(R_3+R_1\to R_3)\end{matrix}\qquad |\mathbf{A}|=\begin{vmatrix} 1 & 4 & 5\\ 0 & -17 & -30\\ 0 & 6 & 12 \end{vmatrix}=(1)\begin{vmatrix} -17 & -30\\ 6 & 12 \end{vmatrix}=-24$$

$$|\mathbf{B}|=\begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 & -2\\ -2 & -3 & 2 & -5\\ 1 & 3 & -2 & 2\\ -1 & -6 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{matrix}(R_1-2R_3\to R_1)\\(R_2+2R_3\to R_2)\\(R_4+R_3\to R_4)\end{matrix}\qquad |\mathbf{B}|=\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 & -6\\ 0 & 3 & -2 & -1\\ 1 & 3 & -2 & 2\\ 0 & -3 & 2 & 5 \end{vmatrix}=(1)\begin{vmatrix} -1 & 1 & -6\\ 3 & -2 & -1\\ -3 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\begin{matrix}(C_1+C_2\to C_1)\\(C_3+6C_2\to C_3)\end{matrix}\qquad |\mathbf{B}|=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0\\ 1 & -2 & -13\\ -1 & 2 & 17 \end{vmatrix}=(-1)\begin{vmatrix} 1 & -13\\ -1 & 17 \end{vmatrix}=(-1)(4)=-4$$

$$\frac{<|>}{<|>}$$

Problema 1.9: Encuentre el determinante de las siguientes matrices, usando únicamente las propiedades de los determinantes.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_1^2 & a_1 & 1 \\ a_2^2 & a_2 & 1 \\ a_3^2 & a_3 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} \qquad c_3 + c_2 \to c_3 \qquad |\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 1 & a & b+c+a \\ 1 & b & c+a+b \\ 1 & c & a+b+c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & (a+b+c)\cdot 1 \\ 1 & b & (a+b+c)\cdot 1 \\ 1 & c & (a+b+c)\cdot 1 \end{vmatrix}$$

Columna 3 multiplicada por un factor común $\Rightarrow |\mathbf{A}| = (a+b+c) \cdot \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & c & 1 \end{vmatrix}$

Determinante con 2 columnas iguales $\Rightarrow |\mathbf{A}| = (a+b+c) \cdot (0) = 0$

$$|\mathbf{B}| = \begin{vmatrix} a_1^2 & a_1 & 1 \\ a_2^2 & a_2 & 1 \\ a_3^2 & a_3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{matrix} f_2 - f_1 \to f_2 \\ f_3 - f_1 \to f_3 \end{matrix} \qquad |\mathbf{B}| = \begin{vmatrix} a_1^2 & a_1 & 1 \\ a_2^2 - a_1^2 & a_2 - a_1 & 0 \\ a_3^2 - a_1^2 & a_3 - a_1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1^2 & a_1 & 1 \\ (a_2+a_1)(a_2-a_1) & a_2 - a_1 & 0 \\ (a_3+a_1)(a_3-a_1) & a_3 - a_1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$|\mathbf{B}| = \begin{vmatrix} a_1^2 & a_1 & 1 \\ (a_2+a_1)(a_2-a_1) & (a_2-a_1)\cdot 1 & (a_2-a_1)\cdot 0 \\ (a_3+a_1)(a_3-a_1) & (a_3-a_1)\cdot 1 & (a_3-a_1)\cdot 0 \end{vmatrix}$$

Filas 2 y 3 multiplicadas por un factor común $\Rightarrow |\mathbf{B}| = (a_2 - a_1) \cdot (a_3 - a_1) \cdot \begin{vmatrix} a_1^2 & a_1 & 1 \\ (a_2+a_1) & 1 & 0 \\ (a_3+a_1) & 1 & 0 \end{vmatrix}$

$$f_3 - f_2 \to f_3 \qquad |\mathbf{B}| = (a_2 - a_1) \cdot (a_3 - a_1) \cdot \begin{vmatrix} a_1^2 & a_1 & 1 \\ (a_2+a_1) & 1 & 0 \\ (a_3-a_2) & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$f_1 \leftrightarrow f_3 \qquad |\mathbf{B}| = (a_2 - a_1) \cdot (a_3 - a_1) \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} (a_3-a_2) & 0 & 0 \\ (a_2+a_1) & 1 & 0 \\ a_1^2 & a_1 & 1 \end{vmatrix}$$

Determinante de una matriz triangular

$$\Rightarrow |\mathbf{B}| = (a_2 - a_1) \cdot (a_3 - a_1) \cdot (-1) \cdot [(a_3 - a_2)] = (a_2 - a_1) \cdot (a_3 - a_1) \cdot (a_2 - a_3)$$

$$\frac{<|>}{<|>}$$

Problema 1.10: Considere el valor del siguiente determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 8$$

en base a este resultado, encuentre el valor de

i) $\begin{vmatrix} -3a_{11} & -3a_{12} & -3a_{13} \\ 2a_{31} & 2a_{32} & 2a_{33} \\ 5a_{21} & 5a_{22} & 5a_{23} \end{vmatrix}$ **ii)** $\begin{vmatrix} 2a_{11}-3a_{21} & 2a_{12}-3a_{22} & 2a_{13}-3a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$

iii) $\begin{vmatrix} -3a_{12} & 2a_{13}-a_{11} & a_{12}+3a_{13} \\ -3a_{22} & 2a_{23}-a_{21} & a_{22}+3a_{23} \\ -3a_{32} & 2a_{33}-a_{31} & a_{32}+3a_{33} \end{vmatrix}$

Solución:
i)

$$\begin{vmatrix} -3a_{11} & -3a_{12} & -3a_{13} \\ 2a_{31} & 2a_{32} & 2a_{33} \\ 5a_{21} & 5a_{22} & 5a_{23} \end{vmatrix} = (-3)\cdot\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 2a_{31} & 2a_{32} & 2a_{33} \\ 5a_{21} & 5a_{22} & 5a_{23} \end{vmatrix} = (-3)\cdot(2)\cdot\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ 5a_{21} & 5a_{22} & 5a_{23} \end{vmatrix}$$

$$= (-3)\cdot(2)\cdot(5)\cdot\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = (-30)\cdot(-1)\cdot\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (30)\cdot(8) = 240$$

ii)

$$\begin{vmatrix} 2a_{11}-3a_{21} & 2a_{12}-3a_{22} & 2a_{13}-3a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2a_{11} & 2a_{12} & 2a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3a_{21} & 3a_{22} & 3a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$= (2)\cdot\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} - (3)\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = (2)\cdot(-1)\cdot\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - (3)\cdot(0)$$

$$= (2)\cdot(-1)(8) - (0) = -16$$

iii)

$$\begin{vmatrix} -3a_{12} & 2a_{13}-a_{11} & a_{12}+3a_{13} \\ -3a_{22} & 2a_{23}-a_{21} & a_{22}+3a_{23} \\ -3a_{32} & 2a_{33}-a_{31} & a_{32}+3a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3a_{12} & 2a_{13} & a_{12}+3a_{13} \\ -3a_{22} & 2a_{23} & a_{22}+3a_{23} \\ -3a_{32} & 2a_{33} & a_{32}+3a_{33} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -3a_{12} & a_{11} & a_{12}+3a_{13} \\ -3a_{22} & a_{21} & a_{22}+3a_{23} \\ -3a_{32} & a_{31} & a_{32}+3a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -3a_{12} & 2a_{13} & a_{12} \\ -3a_{22} & 2a_{23} & a_{22} \\ -3a_{32} & 2a_{33} & a_{32} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -3a_{12} & 2a_{13} & 3a_{13} \\ -3a_{22} & 2a_{23} & 3a_{23} \\ -3a_{32} & 2a_{33} & 3a_{33} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -3a_{12} & a_{11} & a_{12} \\ -3a_{22} & a_{21} & a_{22} \\ -3a_{32} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -3a_{12} & a_{11} & 3a_{13} \\ -3a_{22} & a_{21} & 3a_{23} \\ -3a_{32} & a_{31} & 3a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= (-3)\cdot(2)\cdot\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{12} \\ a_{22} & a_{23} & a_{22} \\ a_{32} & a_{33} & a_{32} \end{vmatrix} + (-3)\cdot(2)\cdot(3)\cdot\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$-(-3)\cdot\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{12} \\ a_{22} & a_{21} & a_{22} \\ a_{32} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} - (-3)\cdot(3)\cdot\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= (-6)\cdot[0] + (-18)\cdot[0] - (-3)\,[0] - (-9)\,[-8] = -72$$

$$\frac{<|>}{<|>}$$

Problema 1.11: Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones lineales y muestre con el resultado la ley de los cosenos, donde a, b, $c \neq 0$, son números reales,

$$\begin{aligned} c\ \cos\alpha + a\ \cos\gamma = b \\ b\ \cos\alpha + a\ \cos\beta = c \\ c\ \cos\beta + b\ \cos\gamma = a \end{aligned}$$

a) Resuelva el sistema usando la regla de Cramer.
b) Resuelva el sistema usando la matriz aumentada.

Solución: Escribiendo el sistema en forma matrical obtenemos

$$\begin{pmatrix} c & 0 & a \\ b & a & 0 \\ 0 & c & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \cos\beta \\ \cos\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ c \\ a \end{pmatrix}$$

a) El determinante del sistema es

$$D = \begin{vmatrix} c & 0 & a \\ b & a & 0 \\ 0 & c & b \end{vmatrix} = cab + abc = 2abc$$

Ahora, tenemos los siguientes determinantes

$$D_1 = \begin{vmatrix} b & 0 & a \\ c & a & 0 \\ a & c & b \end{vmatrix} = b^2 a + a\left(c^2 - a^2\right) = a\left(b^2 + c^2 - a^2\right)$$

$$\cos\alpha = \frac{D_1}{D} = \frac{a\left(b^2 + c^2 - a^2\right)}{2abc} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \quad \Rightarrow \quad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\ \cos\alpha$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} c & b & a \\ b & c & 0 \\ 0 & a & b \end{vmatrix} = c^2 b - b\left(b^2 - a^2\right) = b\left(c^2 - b^2 + a^2\right)$$

$$\cos\beta = \frac{D_2}{D} = \frac{b\left(c^2 - b^2 + a^2\right)}{2abc} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \quad \Rightarrow \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\ \cos\beta$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} c & 0 & b \\ b & a & c \\ 0 & c & a \end{vmatrix} = c\left(a^2 - c^2\right) + b^2 c = c\left(a^2 - c^2 + b^2\right)$$

$$\cos\gamma = \frac{D_3}{D} = \frac{c\left(a^2 - c^2 + b^2\right)}{2ab} = \frac{a^2 - c^2 + b^2}{2ab} \quad \Rightarrow \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\ \cos\gamma$$

$$\frac{<|>}{<|>}$$

b) Escribimos ahora la matriz aumentada del sistema y la transfromamos a su forma escalonada reducida

$$\left(\begin{array}{ccc|c} c & 0 & a & b \\ b & a & 0 & c \\ 0 & c & b & a \end{array}\right) \qquad (cR_2 - bR_1 \rightarrow R_2) \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} c & 0 & a & b \\ 0 & ac & -ab & c^2 - b^2 \\ 0 & c & b & a \end{array}\right)$$

$$(aR_3 - R_2 \rightarrow R_3) \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} c & 0 & a & b \\ 0 & ac & -ab & c^2 - b^2 \\ 0 & 0 & 2ab & a^2 - c^2 + b^2 \end{array}\right)$$

$$(2R_2 + R_3 \rightarrow R_2) \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} c & 0 & a & b \\ 0 & 2ac & 0 & a^2 + c^2 - b^2 \\ 0 & 0 & 2ab & a^2 - c^2 + b^2 \end{array}\right)$$

$$(2bR_1 - R_3 \rightarrow R_1) \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 2bc & 0 & 0 & b^2 - a^2 + c^2 \\ 0 & 2ac & 0 & a^2 + c^2 - b^2 \\ 0 & 0 & 2ab & a^2 - c^2 + b^2 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} (R_1/2bc \rightarrow R_1) \\ (R_2/2ac \rightarrow R_2) \\ (R_3/2ab \rightarrow R_3) \end{array} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & b^2 - a^2 + c^2/2bc \\ 0 & 1 & 0 & a^2 + c^2 - b^2/2ac \\ 0 & 0 & 1 & a^2 - c^2 + b^2/2ab \end{array}\right)$$

de donde obtenemos los siguientes resultados

$$R_1 \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \quad \Rightarrow \quad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\ \cos\alpha$$

$$R_2 \quad \Rightarrow \quad \cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \quad \Rightarrow \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\ \cos\beta$$

$$R_3 \quad \Rightarrow \quad \cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \quad \Rightarrow \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\ \cos\gamma$$

Cada una de estas ecuaciones es la ley de los cosenos.

$$\frac{<|>}{<|>}$$

Problema 1.12: Determine la inversa de la matriz A, donde

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Usando el método de Gauss-Jordan.
b) Usando la matriz adjunta.

Solución: Si el determinante de la matriz A es distinto de cero, entonces A tiene inversa, calculemos su determinate.

Primero hagamoslo desarrollando en cofactores, es claro que el desarrollo se realiza considerando la fila o columna que tenga el mayor número de coeficientes iguales a cero, entonces

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \\ &= (-1)(-1) \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + (1) \left((1) \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - (1) \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \right) = -1 \end{aligned}$$

Ahora usemos las propiedades de los determinantes, esto es,

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$(R_2 \to R_2 - R_1) \ |A| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \quad (R_3 \to R_3 + R_2) \ |A| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$(R_4 \to R_4 + R_3) \ |A| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Como se trata de un determinante de una matriz triangular, entonces el valor del determinante es igual al producto de su diagonal, así,

$$|A| = (-1)(-1)(-1)(1) = -1$$

Como el determinante de la matriz A, es distinto de cero, esto quiere decir que la matriz A, tiene inversa o es invertible.

$$\frac{<\,|\,>}{<\,|\,>}$$

a) Determinemos la inversa de la matriz A usando el método de Gauss-Jordan, esto es como sigue,

$$(A|\, I) \to \left(I|\, A^{-1}\right)$$

donde I es la matriz identidad de tamaño (4×4).

Entonces

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \; R_1 \to -R_1 \; \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$R_2 \to R_2 + R_1 \quad \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$R_3 \to R_3 + R_2 \quad \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$R_4 \to R_4 + R_3 \quad \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} R_2 \to -R_2 \\ R_3 \to -R_3 \end{array} \quad \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} R_1 \to R_1 - R_4 \\ R_2 \to R_2 + R_4 \\ R_3 \to R_3 + 2R_4 \end{array} \quad \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$R_1 \to R_1 + R_3 \quad \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$R_1 \to R_1 + R_2 \quad \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Por lo tanto la matriz inversa es,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{<|>}{<|>}$$

b) Ahora usemos la matriz adjunta para detrminar la inversa de la matriz A. Tenemos que

$$A^{-1} = \frac{adj\,(A)}{|A|}$$

Para obtener la adjunta de la matriz A, necesitamos calcular sus cofactores que se obtiene con la relacion $A_{ij} = (-1)^{i+j}\,|M_{ij}|$, entonces tenemos;

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1,\;\; A_{12} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0,\;\; A_{13} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{14} = -\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,\;\; A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0,\;\; A_{22} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$A_{23} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1,\;\; A_{24} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1,\;\; A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -1,$$

$$A_{32} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -1,\;\; A_{33} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1,\;\; A_{34} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1,$$

$$A_{41} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -2,\;\; A_{42} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -1,\;\; A_{43} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2,$$

$$A_{44} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

Donde la adjunta de la matriz A esta dada por

$$adj(A) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & A_{41} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & A_{42} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & A_{43} \\ A_{14} & A_{24} & A_{34} & A_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

por lo tanto la inversa es

$$A^{-1} = \frac{adj\,(A)}{|A|} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{< | >}{< | >}$$

Problema 1.13: Considere la siguiente matriz A, para que valores del parámetro k, la matriz es invertible (tiene inversa)

$$A = \begin{pmatrix} k+3 & -1 & 1 \\ 5 & k-3 & 1 \\ 6 & -6 & k+4 \end{pmatrix}$$

Solución: Una matriz tiene inversa o es invertible si su determinante es distinto de cero, entonces calculemos su determinante

$$|A| = \begin{vmatrix} k+3 & -1 & 1 \\ 5 & k-3 & 1 \\ 6 & -6 & k+4 \end{vmatrix}$$

$$C_1 \to C_1 + C_2 \;\; |A| = \begin{vmatrix} k+2 & -1 & 1 \\ k+2 & k-3 & 1 \\ 0 & -6 & k+4 \end{vmatrix} = (k+2) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & k-3 & 1 \\ 0 & -6 & k+4 \end{vmatrix}$$

$$C_2 \to C_2 + C_3 \;\; |A| = (k+2) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & k-2 & 1 \\ 0 & k-2 & k+4 \end{vmatrix} = (k+2)\,(k-2) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & k+4 \end{vmatrix}$$

$$R_2 \to R_2 - R_1 \;\; |A| = (k+2)\,(k-2) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & k+4 \end{vmatrix}$$

$$R_3 \to R_3 - R_2 \;\; |A| = (k+2)\,(k-2) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k+4 \end{vmatrix}$$

$$C_3 \to C_3 - C_1 \;\; |A| = (k+2)\,(k-2) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k+4 \end{vmatrix} = (k+2)\,(k-2)(k+4)$$

Necesitamos que

$$|A| = (k+2)\,(k-2)(k+4) \neq 0$$

Entonces la matriz A tiene inversa o es invertible cuando

$$\begin{array}{l} k \neq -2 \\ k \neq 2 \\ k \neq -4 \end{array}$$

$$\frac{<|>}{<|>}$$

Problema 1.14: Considere el siguiente sistema de ecuaciones lineales homogéneo,

$$\begin{aligned} 7x + (a-5)y - z &= 0 \\ 6x - 6y + (a+2)z &= 0 \\ (a+3)x - y + z &= 0 \end{aligned}$$

diga que volores debe tomar el parámetro a, para que el sistema;
a) Tenga solución unica (solución trivial).
b) Tenga un número infinito de soluciones.

Solución: Para un sistema homogeneo de ecuaciones lineales, el tipo de solución esta definido por el valor del detrminante de dicho sistema, calculemos entonces sea $|A|$ el determinate del sistema, esto es,

$$|A| = \begin{vmatrix} 7 & a-5 & -1 \\ 6 & -6 & a+2 \\ a+3 & -1 & 1 \end{vmatrix} \quad R_1 \leftrightarrow R_3 \;\; |A| = (-1)\begin{vmatrix} a+3 & -1 & 1 \\ 6 & -6 & a+2 \\ 7 & a-5 & -1 \end{vmatrix}$$

$$R_2 \leftrightarrow R_3 \;\; |A| = (-1)(-1)\begin{vmatrix} a+3 & -1 & 1 \\ 7 & a-5 & -1 \\ 6 & -6 & a+2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+3 & -1 & 1 \\ 7 & a-5 & -1 \\ 6 & -6 & a+2 \end{vmatrix}$$

$$C_1 \to C_1 + C_2 \;\; |A| = \begin{vmatrix} a+2 & -1 & 1 \\ a+2 & a-5 & 1 \\ 0 & -6 & a+2 \end{vmatrix} = (a+2)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & a-5 & 1 \\ 0 & -6 & a+2 \end{vmatrix}$$

$$C_2 \to C_2 + C_3 \;\; |A| = (a+2)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & a-4 & 1 \\ 0 & a-4 & a+2 \end{vmatrix} = (a+2)\,(a-4)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a+2 \end{vmatrix}$$

$$R_2 \to R_2 - R_1 \;\; |A| = (a+2)\,(a-4)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a+2 \end{vmatrix}$$

$$R_3 \to R_3 - R_2 \;\; |A| = (a+2)\,(a-4)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a+2 \end{vmatrix}$$

$$C_3 \to C_3 - C_1 \;\; |A| = (a+2)\,(a-4)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a+2 \end{vmatrix} = (a+2)\,(a-4)(a+2) = (a+2)^2\,(a-4)$$

Así tenemos que,

a) Solución única si $|A| = (a+2)^2\,(a-4) \neq 0$ entonces

$$\begin{aligned} a &\neq -2 \\ a &\neq 4 \end{aligned}$$

a) Solución infinitas si $|A| = (a+2)^2\,(a-4) = 0$ entonces

$$\begin{aligned} a &= -2 \\ a &= 4 \end{aligned}$$

$$\frac{<|>}{<|>}$$

Problema 1.15: Encuentre la forma general de las matrices $A \in M_{22}$ tales que conmuten con la matriz B, esto es, $AB = BA$ donde

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución: Como $A \in M_{22}$, significa que A es de la forma $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, luego entonces tenemos los productos

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+b & -a+b \\ 2c+d & -c+d \end{pmatrix} \\ BA &= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a-c & 2b-d \\ a+c & b+d \end{pmatrix} \end{aligned}$$

requerimos que las matrices conmuten, esto es

$$AB = BA \Rightarrow \begin{pmatrix} 2a+b & -a+b \\ 2c+d & -c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a-c & 2b-d \\ a+c & b+d \end{pmatrix}$$

de donde obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{array}{l} 2a+b = 2a-c \\ -a+b = 2b-d \\ 2c+d = a+c \\ -c+d = b+d \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} b+c = 0 \\ -a-b+d = 0 \\ -a+c+d = 0 \\ -b-c = 0 \end{array}$$

cuya matriz aumentada es

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) (R_1 \leftrightarrow R_2) \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) ((-1)R_1 \rightarrow R_1) \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$(R_3 + R_1 \rightarrow R_3) \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_2 \Rightarrow b = -c \\ R_1 \Rightarrow a = -b+d \end{array}$$

$$\begin{array}{l} c = \alpha \in R \\ d = \beta \in R \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} a = \alpha + \beta \\ b = -\alpha \\ c = \alpha \\ d = \beta \end{array} \quad \text{donde } \alpha \text{ y } \beta \text{ son parámetros libres.}$$

Por lo tanto, las matrices que buscamos son de la forma

$$A = \begin{pmatrix} \alpha+\beta & -\alpha \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$$

las cuales conmutan con la matriz B para todo valor de α y β.

Este resultado incluye a las matrices cero e identidad, las cuales conmutan con cualquier matriz

$$\begin{array}{l} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{array} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{array}{l} \alpha = 0 \\ \beta = 1 \end{array} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{<|>}{<|>}$$

Problema 1.16: Muestre que si A es una matriz de tamaño $n \times n$, entonces el determinante de su adjunta es igual aldeterminate de A elevado a la $(n-1)$, esto es

$$|adj(A)| = (|A|)^{n-1}$$

Solución: Conocemos la relación para obtener la matriz inversa, dada por

$$A^{-1} = \frac{adj\,(A)}{|A|}$$

de aquí tenemos que

$$A^{-1} \cdot A = \frac{adj\,(A)}{|A|} \cdot A \quad \Rightarrow \quad I_n = \frac{1}{|A|} adj(A) \cdot A$$

donde I_n es la matriz identidad de tamaño $n \times n$, como el determinate es un escalar puede pasar multiplicado del lado izquierdo de la igualdad

$$|A| \cdot I_n = adj(A) \cdot A$$

obteneindo el determinate a ambos lados resulta

$$||A| \cdot I_n| = |adj(A) \cdot A| = |adj(A)| \cdot |A|$$

para el determinate izquierdo

$$||A| \cdot I_n| = \begin{vmatrix} |A| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |A| & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & |A| \end{vmatrix} = |A|^n$$

entonces

$$|A|^n = |adj(A)| \cdot |A| \quad \Rightarrow \quad |adj(A)| = \frac{|A|^n}{|A|}$$

por lo tanto

$$|adj(A)| = (|A|)^{n-1}$$

$$\frac{<|>}{<|>}$$

Problema II.1: Sea M el conjunto de todas las matrices invertibles de tamaño 3×3, muestre que este conjunto no es un espacio vectorial.

Solución: Consideremos las siguientes matrices A, $B \in M$, esto es,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow |A| = 1$$

y

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow |B| = -1$$

Ambas matrices son invertibles ya que sus determinantes son distintos de cero, que es la condición que debe cumplir una matriz para que tenga inversa. De estas matrices tenemos que

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow |A + B| = 0$$

Esta matriz no es invertible ya que su determinate es igual a cero, por lo tanto, no se cumple la propiedad de cerredura aditiva, esto es,

$$A, B \in M \quad \text{pero} \quad A + B \notin M$$

Por lo tanto, M no es un espacio vectorial, al no cumplir esta propiedad.

Problema II.2: Sea el conjunto $V = \{(a, b) \mid a, b \in R\}$ y sean las siguientes operaciones definidas
suma: $(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d)$
producto: $\alpha \odot (a, b) = (\alpha a, 0)$
Determine si el conjunto V es o no es un espacio vectorial.

Solución: Se puede verificar que todas las propiedades para la operación de suma si se satisfacen, esto es debido a como esta definida.
Ahora, consideremos el siguiente vector $(a, b) \in V$, donde $a, b \in R$, entonces tenemos que

$$1 \odot (a, b) = (a, 0) \neq (a, b)$$

es decir, para la operación de producto no existe el elemento neutro multiplicativo que cumpla con la condición

$$1 \odot u = u \quad \text{para todo} \quad u \in V$$

Por lo cual, V no es un espacio vectorial.

$$\frac{<\,|\,>}{<\,|\,>}$$

Problema II.3: Verifique si los conjuntos siguientes, junto con las operaciones definidas para cada uno de ellos, son o no son espacios vectoriales

a) $V = \{(x, y, z) \mid \; x, y, z \in R\}$
suma: $(x_1, y_1, z_1) \oplus (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$
producto: $a \odot (x, y, z) = (x, 1, z)$

b) $W = \{u \mid u \text{ es un número real positivo}\}$
suma: $u \oplus v = uv$
producto: $\alpha \odot u = u^{\alpha}$

Solución:

a) Se puede verificar que todas las propiedades para la operación de suma si se satisfacen, esto es debido a como esta definida.

Ahora, consideremos el siguiente vector $(a, b, c) \in V$, donde $a, b, c \in R$, entonces tenemos que

$$1 \odot (a, b, c) = (a, 1, c) \neq (a, b, c)$$

es decir, para la operación de producto no existe el elemento neutro multiplicativo que cumpla con la condición

$$1 \odot u = u \;\text{ para todo }\; u \in V$$

Por lo cual, V no es un espacio vectorial.

b) Sean $u, v, w \in W$, verifiquemos las propiedades de la suma

i) Cerradura, $u \oplus v = uv > 0 \quad \Rightarrow \quad u \oplus v \in W$, si se cumple.
ii) Conmutatividad, $u \oplus v = uv = vu = v \oplus u$, si se cumple.
iii) Asociatividad, $(u \oplus v) \oplus w = (uv)\, w = u\, (vw) = u \oplus (v \oplus w)$, si se cumple.
iv) Neutro Aditivo, existe $1 \in W$ tal que $u \oplus 1 = u \cdot 1 = u$, si se cumple.
v) Inverso Aditivo, para todo $u \in W$, existe $0 \in W$ tal que $u \oplus 0 = u \cdot 0 = 0$, si se cumple.

Sean $u, v \in W$ y $\alpha, \beta \in R$, verifiquemos las propiedades del producto
i) Cerredura, $\alpha \odot u = u^{\alpha} > 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha \odot u \in W$, si se cumple.
ii) Neutro Multiplicativo, existe $1 \in W$ tal que $u \odot 1 = u^1 = u$, si se cumple.
iii) Asociatividad, $\alpha\beta \odot u = u^{\alpha\beta} = \left(u^{\beta}\right)^{\alpha} = \alpha\, (\beta \odot u)$, si se cumple.
iv) Distributividad respecto a la suma de escalares

$$(\alpha + \beta) \odot u = u^{\alpha+\beta} = u^{\alpha} u^{\beta} = (u^{\alpha}) \oplus \left(u^{\beta}\right) = (\alpha \odot u) \oplus (\beta \odot u), \text{si se cumple.}$$

v) Distributividad respecto a la suma de vectores

$$\alpha \odot (u \oplus v) = \alpha \odot (uv) = (uv)^{\alpha} = u^{\alpha} v^{\alpha} = u^{\alpha} \oplus v^{\alpha} = (\alpha \odot u) \oplus (\alpha \odot v) \text{ ,si se cumple.}$$

Por lo tanto, W si es un espacio vectorial.

$$\frac{<|>}{<|>}$$

Problema II.4: Cuales de los siguientes subconjuntos de P_2 (espacio vectorial de polinomios de grado ≤ 2) son subespacios vectoriales. Con las operaciones de suma y producto normales que conocemos.

a) $V = \{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \mid \ a_0 = 0\}$

b) $V = \{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \mid \ a_1 + a_2 = a_0\}$

c) $V = \{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \mid \ a_1 = 2a_0\}$

d) $V = \{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \mid \ a_2 = a_1 + 1\}$

Solución: Recordemos que para verificar si un subconjunto de un espacio vectorial, es un subespacio vectorial, solo tenemos que comprobar las dos propiededes de cerradura.

a) Consideremos dos vectores $p(t)$, $q(t) \in V$, donde ambos son de la forma $p(t) = a_1 t + a_2 t^2$ y $q(t) = b_1 t + b_2 t^2$, ya que $a_0 = 0$ en ambos casos por definición y ademas consideremos un escalar $\alpha \in R$. Entonces tenemos

i) Cerradura aditiva

$$\begin{aligned} p(t) + q(t) &= \left(a_1 t + a_2 t^2\right) + \left(b_1 t + b_2 t^2\right) \\ &= (a_1 + b_1)\, t + (a_2 + b_2)\, t^2 \in V \end{aligned}$$

ii) Cerradura multiplicativa

$$\alpha \cdot p(t) = \alpha \cdot \left(a_1 t + a_2 t^2\right) = \alpha \cdot a_1 t + \alpha \cdot a_2 t^2 \in V$$

Vemos que V es cerrado bajo la suma y producto, por lo tanto, V es un subespacio vectorial de P_2.

b) Consideremos dos vectores $p(t)$, $q(t) \in V$, donde ambos son de la forma $p(t) = (a_1 + a_2) + a_1 t + a_2 t^2$ y $q(t) = (b_1 + b_2) + b_1 t + b_2 t^2$, ya que $a_0 = a_1 + a_2$ en ambos casos por definición y ademas consideremos un escalar $\alpha \in R$. Entonces tenemos

i) Cerradura aditiva

$$\begin{aligned} p(t) + q(t) &= \left[(a_1 + a_2) + a_1 t + a_2 t^2\right] + \left[(b_1 + b_2) + b_1 t + b_2 t^2\right] \\ &= [(a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)] + (a_1 + b_1)\, t + (a_2 + b_2)\, t^2 \in V \end{aligned}$$

ii) Cerradura multiplicativa

$$\begin{aligned} \alpha \cdot p(t) &= \alpha \cdot \left[(a_1 + a_2) + a_1 t + a_2 t^2\right] \\ &= (\alpha \cdot a_1 + \alpha \cdot a_2) + \alpha \cdot a_1 t + \alpha \cdot a_2 t^2 \in V \end{aligned}$$

Tenemos que V es cerrado bajo la suma y producto, por lo tanto, V es un subespacio vectorial de P_2.

c) Consideremos dos vectores $p(t)$, $q(t) \in V$, donde ambos son de la forma $p(t) = a_0 + 2a_0 t + a_2 t^2$ y $q(t) = b_0 + 2b_0 t + b_2 t^2$, ya que $a_1 = 2a_2$ en ambos casos por definición y ademas consideremos un escalar $\alpha \in R$. Entonces tenemo

i) Cerradura aditiva

$$\begin{aligned} p(t) + q(t) &= \left(a_0 + 2a_0 t + a_2 t^2\right) + \left(b_0 + 2b_0 t + b_2 t^2\right) \\ &= (a_0 + b_0) + 2\,(a_0 + b_0)\, t + (a_2 + b_2)\, t^2 \in V \end{aligned}$$

ii) Cerradura multiplicativa

$$\begin{aligned} \alpha \cdot p(t) &= \alpha \cdot \left(a_0 + 2a_0 t + a_2 t^2\right) \\ &= \alpha \cdot a_0 + 2\alpha \cdot a_0 t + \alpha \cdot a_2 t^2 \in V \end{aligned}$$

De donde V es cerrado bajo la suma y producto, por lo tanto, V es un subespacio vectorial de P_2.

$$\frac{<|>}{<|>}$$

d) Consideremos dos vectores tales que $p(t)$, $q(t) \in V$, donde ambos son de la forma $p(t) = a_0 + a_1 t + (a_1 + 1)\, t^2$ y $q(t) = b_0 + b_1 t + (b_1 + 1)\, t^2$, ya que $a_2 = a_1 + 1$ en ambos casos por definición y ademas consideremos un escalar $\alpha \in R$. Entonces tenemos

i) Cerradura aditiva

$$\begin{aligned} p(t) + q(t) &= \left[a_0 + a_1 t + (a_1 + 1)\, t^2\right] + \left[b_0 + b_1 t + (b_1 + 1)\, t^2\right] \\ &= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)\, t + (a_1 + b_1 + 2)\, t^2 \notin V \text{ ya que } a_2 = a_1 + 2 \end{aligned}$$

ii) Cerradura multiplicativa

$$\begin{aligned} \alpha \cdot p(t) &= \alpha \cdot \left[a_0 + a_1 t + (a_1 + 1)\, t^2\right] \\ &= \alpha \cdot a_0 + \alpha \cdot a_1 t + (\alpha \cdot a_1 + \alpha \cdot 1)\, t^2 \notin V \text{ ya que } a_2 = a_1 + \alpha \end{aligned}$$

Observamos que V no es cerrado bajo la suma ni bajo el producto, por lo tanto, V es no es un subespacio vectorial de P_2.

$$\frac{<\,|\,>}{<\,|\,>}$$

Problema II.5: Determine cuales de los siguientes subconjuntos de R^3 forman un subespacio vectorial o no. Con las operaciones de suma y producto normales que conocemos.

a) $W = \{(a, b, c) \mid \ c = a + b\}$

b) $W = \{(a, b, c) \mid 3a - b + 2c = -1\}$

c) $W = \{(a, b, c) \mid a = -c\}$

d) $W = \{(a, b, c) \mid b = 2a + 1 \ \}$

Solución: Recordemos que para verificar si un subconjunto de un espacio vectorial, es un subespacio vectorial, solo tenemos que comprobar las dos propiededes de cerradura.

a) Consideremos dos vectores u, $v \in W$, donde ambos son de la forma $u = (a_1, b_1, a_1 + b_1)$ y $v = (a_2, b_2, a_2 + b_2)$, ya que $c = a + b$ en ambos casos por definición y ademas consideremos un escalar $\alpha \in R$. Entonces

i) Cerradura aditiva

$$\begin{aligned} u + v &= (a_1, b_1, a_1 + b_1) + (a_2, b_2, a_2 + b_2) \\ &= (a_1 + a_2, b_1 + b_2, a_1 + b_1 + a_2 + b_2) \in W \end{aligned}$$

ii) Cerradura multiplicativa

$$\alpha \cdot u = \alpha \cdot (a_1, b_1, a_1 + b_1) = (\alpha \cdot a_1, \alpha \cdot b_1, \alpha \cdot a_1 + \alpha \cdot b_1) \in W$$

Tenemos que W es cerrado bajo la suma y producto, por lo tanto, W es un subespacio vectorial de R^3.

b) Consideremos dos vectores u, $v \in W$, en particular sean $u = (0, 1, 0)$ y $v = (0, 1, 0)$, en ambos se cumple que $3a - b + 2c = -1$ por definición y ademas consideremos un escalar $\alpha \in R$. Entonces

i) Cerradura aditiva

$$u + v = (0, 1, 0) + (0, 1, 0) = (0, 2, 0) \notin W \text{ ya que } 3a - b + 2c = -2$$

ii) Cerradura multiplicativa

$$\alpha \cdot u = \alpha \cdot (0, 1, 0) = (0, \alpha \cdot 1, 0) \notin W \text{ si } \alpha \neq 1$$

Observamos que W no es cerrado bajo la suma y solo es cerredo bajo el producto para un solo valor de α, por lo tanto, W no es un subespacio vectorial de R^3.

c) Consideremos dos vectores u, $v \in W$, donde ambos son de la forma $u = (-c_1, b_1, c_1)$ y $v = (-c_2, b_2, c_2)$, ya que $a = -c$ en ambos casos por definición y ademas consideremos un escalar $\alpha \in R$. Entonces

i) Cerradura aditiva

$$u + v = (-c_1, b_1, c_1) + (-c_2, b_2, c_2) = (-c_1 - c_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2) \in W$$

ii) Cerradura multiplicativa

$$\alpha \cdot u = \alpha \cdot (-c_1, b_1, c_1) = (-\alpha \cdot c_1, \alpha \cdot b_1, \alpha \cdot c_1) \in W$$

De donde W es cerrado bajo la suma y producto, por lo tanto, W es un subespacio vectorial de R^3.

d) Consideremos dos vectores u, $v \in W$, donde ambos son de la forma $u = (a_1, 2a_1 + 1, c_1)$ y $v = (a_2, 2a_2 + 1, c_2)$, ya que $b = 2a + 1$ en ambos casos por definición y ademas consideremos un escalar $\alpha \in R$. Entonces

i) Cerradura aditiva

$$\begin{aligned} u + v &= (a_1, 2a_1 + 1, c_1) + (a_2, 2a_2 + 1, c_2) \\ &= (a_1 + a_2, 2a_1 + 2a_2 + 2, c_1 + c_2) \notin W \text{ ya que } b = 2a + 2 \end{aligned}$$

ii) Cerradura multiplicativa

$$\alpha \cdot u = \alpha \cdot (a_1, 2a_1 + 1, c_1) = (\alpha \cdot a_1, \alpha \cdot 2a_1 + \alpha, \alpha \cdot c_1) \notin W \text{ si } \alpha \neq 1$$

Tenemos que W no es cerrado bajo la suma y solo es cerredo bajo el producto para un solo valor de α, por lo tanto, W no es un subespacio vectorial de R^3.

$$\frac{< | >}{< | >}$$

Problema II.6: Determine si los siguientes conjuntos W son subespacios vectoriales o no del espacio vectorial M_{nn} (espacio vectorial de las matrices de tamaño $n \times n$)

a) $W = \left\{A \in M_{nn} \mid A^T = A\right\}$

b) $W = \{A \in M_{nn} \mid A \text{ es diagonal}\}$

c) $W = \{A \in M_{nn} \mid A \text{ es triangular superior}\}$

Solución: Recordemos que para verificar si un subconjunto de un espacio vectorial, es un subespacio vectorial, solo tenemos que comprobar las dos propiededes de cerradura.

a) Consideremos dos vectores A, $B \in W$, donde ambos son de la forma $A^T = A$ y $B^T = B$ por definición (la transpuesta de una matriz es igual a la matriz) y ademas consideremos un escalar $\alpha \in R$. Entonces

i) Cerradura aditiva

$$(A+B)^T = A^T + B^T = A + B \in W$$

ii) Cerradura multiplicativa

$$(\alpha \cdot A)^T = \alpha \cdot A^T = \alpha \cdot A \in W$$

Tenemos que W es cerrado bajo la suma y producto, por lo tanto, W es un subespacio vectorial de M_{nn}.

b) Consideremos dos vectores A, $B \in W$, donde ambos son matrices diagonales por definición $A = \begin{cases} a_{ij} = 0 \text{ si } i \neq j \\ a_{ij} \neq 0 \text{ si } i = j \end{cases}$ y ademas consideremos un escalar $\alpha \in R$. Entonces

i) Cerradura aditiva

$$A + B = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 + b_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n + b_n \end{pmatrix} \in W$$

ii) Cerradura multiplicativa

$$\alpha \cdot A = \alpha \cdot \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha a_n \end{pmatrix} \in W$$

Donde W es cerrado bajo la suma y producto, por lo tanto, W es un subespacio vectorial de M_{nn}.

$$\frac{<|>}{<|>}$$

c) Consideremos dos vectores A, $B \in W$, donde ambos son matrices triangulares superiores, por definición $A = \begin{cases} a_{ij} = 0 \text{ si } i > j \\ a_{ij} \neq 0 \text{ si } i < j \end{cases}$ y ademas consideremos un escalar $\alpha \in R$. Entonces

i) Cerradura aditiva

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ 0 & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} + b_{nn} \end{pmatrix} \in W$$

ii) Cerradura multiplicativa

$$\alpha \cdot A = \alpha \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \cdots & \alpha a_{12} \\ 0 & \alpha a_{22} & \cdots & \alpha a_{22} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha a_{n} \end{pmatrix} \in W$$

Tenemos que W es cerrado bajo la suma y producto, por lo tanto, W es un subespacio vectorial de M_{nn}.

$$\frac{<\,|\,>}{<\,|\,>}$$

Problema II.7: Considere el espacio vectorial M_{23}. Mostrar cuales de los siguientes subconjuntos de M_{23} son subespacios vectoriales.

a) $V = \left\{ A \in M_{23} |\, A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } b = a + c \right\}$

b) $V = \left\{ A \in M_{23} |\, A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix},\ a = -2c \text{ y } f = 2e + d \right\}$

c) $V = \left\{ A \in M_{23} |\, A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & a \\ d & c & 0 \end{pmatrix} \right\}$

d) $V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \mid\ a + c = 0 \text{ y } b + d + f = 0 \right\}$

Solución: Para verificar si un subconjunto de un espacio vectorial, es un subespacio vectorial, solo tenemos que comprobar las dos propiededes de cerradura.

a) Consideremos dos vectores A, $B \in V$, y ademas consideremos un escalar $\alpha \in R$. Entonces

i) Cerradura aditiva

$$\begin{aligned} A + B &= \begin{pmatrix} a_1 & a_1 + c_1 & c_1 \\ d_1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & a_2 + c_2 & c_2 \\ d_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & a_1 + c_1 + a_2 + c_2 & c_1 + c_2 \\ d_1 + d_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in V \end{aligned}$$

ii) Cerradura multiplicativa

$$\begin{aligned} \alpha \cdot A &= \alpha \cdot \begin{pmatrix} a_1 & a_1 + c_1 & c_1 \\ d_1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha a_1 & \alpha a_1 + \alpha c_1 & \alpha c_1 \\ \alpha d_1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in V \end{aligned}$$

asi vemos que V es cerrado bajo la suma y producto, por lo tanto, V es un subespacio vectorial de M_{23}.

b) Consideremos dos vectores A, $B \in V$, y ademas consideremos un escalar $\alpha \in R$. Entonces

i) Cerradura aditiva

$$\begin{aligned} A + B &= \begin{pmatrix} -2c_1 & b_1 & c_1 \\ d_1 & e_1 & 2e_1 + d_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2c_2 & b_2 & c_2 \\ d_2 & e_2 & 2e_2 + d_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2c_1 - 2c_2 & b_1 + b_2 & c_1 + c_2 \\ d_1 + d_2 & e_1 + e_2 & 2e_1 + d_1 + 2e_2 + d_2 \end{pmatrix} \in V \end{aligned}$$

ii) Cerradura multiplicativa

$$\begin{aligned} \alpha \cdot A &= \alpha \cdot \begin{pmatrix} -2c_1 & b_1 & c_1 \\ d_1 & e_1 & 2e_1 + d_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2\alpha c_1 & \alpha b_1 & \alpha c_1 \\ \alpha d_1 & \alpha e_1 & 2\alpha e_1 + \alpha d_1 \end{pmatrix} \in V \end{aligned}$$

asi vemos que V es cerrado bajo la suma y producto, por lo tanto, V es un subespacio vectorial de M_{23}.

$$\frac{<|>}{<|>}$$

c) Consideremos dos vectores A, $B \in V$, y ademas consideremos un escalar $\alpha \in R$. Entonces

i) Cerradura aditiva

$$\begin{aligned} A + B &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & a_1 \\ d_1 & c_1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & a_2 \\ d_2 & c_2 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 2 & a_1 + a_2 \\ d_1 + d_2 & c_1 + c_2 & 0 \end{pmatrix} \notin V \text{ ya que } a_{12} = 2 \end{aligned}$$

ii) Cerradura multiplicativa

$$\begin{aligned} \alpha \cdot A &= \alpha \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & a_1 \\ d_1 & c_1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \alpha a_1 \\ \alpha d_1 & \alpha c_1 & 0 \end{pmatrix} \notin V \text{ si } \alpha \neq 1 \end{aligned}$$

asi vemos que V no es cerrado bajo la suma y solo es cerredo para el producto para un valor particular de α, por lo tanto, V no es un subespacio vectorial de M_{23}.

d) Consideremos dos vectores A, $B \in V$, y ademas consideremos un escalar $\alpha \in R$. Entonces

i) Cerradura aditiva

$$\begin{aligned} A + B &= \begin{pmatrix} -c_1 & -d_1 - f_1 & c_1 \\ d_1 & e_1 & f_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -c_2 & -d_2 - f_2 & c_2 \\ d_2 & e_2 & f_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -c_1 - c_2 & -d_1 - f_1 - d_2 - f_2 & c_1 + c_2 \\ d_1 + d_2 & e_1 + e_2 & f_1 + f_2 \end{pmatrix} \in V \end{aligned}$$

ii) Cerradura multiplicativa

$$\begin{aligned} \alpha \cdot A &= \alpha \cdot \begin{pmatrix} -c_1 & -d_1 - f_1 & c_1 \\ d_1 & e_1 & f_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\alpha c_1 & -\alpha d_1 - \alpha f_1 & \alpha c_1 \\ \alpha d_1 & \alpha e_1 & \alpha f_1 \end{pmatrix} \in V \end{aligned}$$

tenemos que V es cerrado bajo la suma y producto, por lo tanto, V es un subespacio vectorial de M_{23}.

Problema II.8: Muestre que el conjunto de todos los puntos del plano $ax + by + cz = 0$ es un subespacio vectorial de R^3.

Solución: Para verificar si un subconjunto de un espacio vectorial, es un subespacio vectorial, solo tenemos que comprobar las dos propiedades de cerradura.

Reescribimos los puntos del plano como el conjunto $H = \{\,(x, y, z)|\, ax + by + cz = 0\}$. Sean $u, v \in H$ y $\alpha \in R$ es un escalar, entonces

i) Cerradura aditiva

$$\begin{aligned} u &= (x_1, y_1, z_1) \in H \Rightarrow ax_1 + by_1 + cz_1 = 0 \\ v &= (x_2, y_2, z_2) \in H \Rightarrow ax_2 + by_2 + cz_2 = 0 \end{aligned}$$

sumando y factorizando las ecuaciones anteriores, se tiene que

$$\begin{aligned} &(ax_1 + by_1 + cz_1) + (ax_2 + by_2 + cz_2) = 0 \\ &\Rightarrow a\,(x_1 + x_2) + b(y_1 + y_2) + c\,(z_1 + z_2) = 0 \\ &\Rightarrow (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) = u + v \in H \end{aligned}$$

ii) Cerradura multiplicativa

$$u = (x_1, y_1, z_1) \in H \Rightarrow ax_1 + by_1 + cz_1 = 0$$

multiplicamos la ecuacion anterior por el escalar α, obtenemos

$$\begin{aligned} &\alpha \cdot ax_1 + \alpha \cdot by_1 + \alpha \cdot cz_1 = 0 \\ &a\,(\alpha x_1) + b(\alpha y_1) + c(\alpha z_1) = 0 \\ &\Rightarrow (\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1) = \alpha \cdot u \in H \end{aligned}$$

Por lo tanto, el subconjunto H que contiene a todos los puntos del plano $ax + by + cz = 0$, es cerrado bajo las operaciones de suma de vectores y multiplicación por un escalar, esto es, H es un subespacio vectorial de R^3.

$$\frac{<|>}{<|>}$$

Problema III.1: Considere el espacio vectorial F, que consiste de todas los funciones continuas y diferenciables en un intervalo cerrado $[a, b]$. Muestre que las funciones $f_1(t) = e^t$ y $f_2(t) = e^{2t}$ en este espacio vectorial son linealmente independientes.

Solución:

Método 1) Usando la definición, dos vectores u y v son linealmente independientes si tenemos que

$$\alpha_1 u + \alpha_2 v = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0$$

para este caso tenemos los vectores $u = f_1(t) = e^t$ y $v = f_2(t) = e^{2t}$ del espacio vectorial F.

Para poder determinar los valores de los escalares α_1 y α_2, necesitamos al menos otra ecuación, esta la generamos derivando la ecuación anterior, así tendremos un sistema de dos ecuaciones con dos incognitas, esto es

$$\begin{aligned} \alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t) &= 0 \\ \alpha_1 f_1'(t) + \alpha_2 f_2'(t) &= 0 \end{aligned}$$

al sustituir las funciones tenemos

$$\begin{aligned} \alpha_1 e^t + \alpha_2 e^{2t} &= 0 \\ \alpha_1 e^t + 2\alpha_2 e^{2t} &= 0 \end{aligned}$$

restando la primera de la segunda ecuacion, tenemos que

$$\alpha_2 e^{2t} = 0 \text{ como } e^{2t} \neq 0 \text{ para todo } t \in R \Rightarrow \alpha_2 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0$$

Por lo tanto las funciones $f_1(t) = e^t$ y $f_2(t) = e^{2t}$ son linealmente independientes.

Método 2) Supongamos que estas funciones son linelamente dependientes, esto significa que una de ellas es un multiplo de la otra, esto es

$$\begin{aligned} & f_2(t) = \alpha f_1(t) \\ & \Rightarrow e^{2t} = \alpha e^t \text{ donde } \alpha \in R \end{aligned}$$

ahora dividimos la ecuación anterior por e^t, obteniendo

$$e^t = \alpha$$

lo cual no puede ses cierto. Por lo tanto las funciones $f_1(t) = e^t$ y $f_2(t)$ son linealmente independientes.

$$\frac{<|>}{<|>}$$

Problema III.2: Sean $v_1 = \left(1, \alpha, \alpha^2\right)$, $v_2 = \left(1, \beta, \beta^2\right)$ y $v_3 = \left(1, \gamma, \gamma^2\right)$ tres vectores de R^3, donde α, β y γ son numeros reales distintos de cero. Que condiciones deben cumplir los números α, β y γ para que los tres vectores v_1, v_2 y v_3 sean linealmente independientes.

Solución: Dela definicón tenemos que v_1, v_2 y v_3 serán linealmente independientes si se cumple que para

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 = 0 \Rightarrow c_1 = c_2 = c_3 = 0$$

sustituyendo los vectores tenemos que

$$\begin{aligned} c_1\left(1, \alpha, \alpha^2\right) + c_2\left(1, \beta, \beta^2\right) + c_3\left(1, \gamma, \gamma^2\right) &= (0,0,0) \\ \left(c_1, c_1\alpha, c_1\alpha^2\right) + \left(c_2, c_2\beta, c_2\beta^2\right) + \left(c_3, c_3\gamma, c_3\gamma^2\right) &= (0,0,0) \\ \left(c_1 + c_2 + c_3, c_1\alpha + c_2\beta + c_3\gamma, c_1\alpha^2 + c_2\beta^2 + c_3\gamma^2\right) &= (0,0,0) \end{aligned}$$

de donde se obtiene el siguiente sistema homogéneo de 3 ecuaciones con 3 incognitas (c_1, c_2 y c_3)

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 + c_3 = 0 \\ c_1\alpha + c_2\beta + c_3\gamma = 0 \\ c_1\alpha^2 + c_2\beta^2 + c_3\gamma^2 = 0 \end{aligned}$$

Recordemos que para un sistema homogéneo solo existen dos posibilidades para la solución, o tiene solución única (la solución trivial) o tiene soluciones infinitas. Es claro que necesitamos que el sistema tenga solución única ($c_1 = c_2 = c_3 = 0$) para que los vectores sean linealmente independientes.

Así, un sistema de ecuaciones lineales homogéneo tiene solución única si su determinante correspondiente es distinto de cero, para este caso

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 \end{vmatrix} \neq 0$$

El valor de este determinante es igual a (ver **Problema I.9 B)**),

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 \end{vmatrix} = (\beta - \alpha)(\gamma - \alpha)(\beta - \gamma) \neq 0$$

de esta forma, para que los vectores v_1, v_2 y v_3 sean linealmente independientes, los números α, β y γ deben satisfacer las siguientes condiciones

$$\begin{aligned} \beta &\neq \alpha \\ \gamma &\neq \alpha \\ \beta &\neq \gamma \end{aligned}$$

$$\frac{<\,|\,>}{<\,|\,>}$$

Problema III.3: Encuentre una base y la dimensión del subespacio W de R^4, que consta de todos los vectores de la forma $v = (a+b, a-b+2c, b, c)$ donde a, b y c son números reales.

Solución: Podemos escribir al subespacio W como el siguiente conjunto de vectores de R^4

$$W = \{\,(x, y, z, w)|\,(a+b, a-b+2c, b, c)\}$$

donde a, b y c son parámetros $(a, b, c \in R)$

Ahora factorizamos a los vectores de W en términos de los parámetros a, b y c, esto es

$$(a+b, a-b+2c, b, c) = a\,(1, 1, 0, 0) + b\,(1, -1, 1, 0) + c\,(0, 2, 0, 1)\,,$$

Esto significa que el conjunto de vectores $\{(1, 1, 0, 0)\,, (1, -1, 1, 0)\,, (0, 2, 0, 1)\}$ genera a todos los vectores que estan en W, ya que todo $(x, y, z, w) \in W$, se puede escribir como combinación lineal de estos tres vectores.

Por otra parte, resolvamos la ecuación

$$\alpha_1\,(1, 1, 0, 0) + \alpha_2\,(1, -1, 1, 0) + \alpha_3\,(0, 2, 0, 1) = (0, 0, 0, 0)$$

la cual genera el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 &= 0 \\ \alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3 &= 0 \\ \alpha_2 &= 0 \\ \alpha_3 &= 0 \end{aligned}$$

en donde observamos facilmente que $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, esto significa que el conjunto de vectores $\{(1, 1, 0, 0)\,, (1, -1, 1, 0)\,, (0, 2, 0, 1)\}$ es linealmente independiente.

Por lo tanto, tenemos que el conjunto de vectores $\{(1, 1, 0, 0)\,, (1, -1, 1, 0)\,, (0, 2, 0, 1)\}$ genera a W y ademas es linealmente independiente, por lo cual es una base para el subespacio W.

Finalmente tenemos que, de acuerdo a la definición, la dimensión de un espacio vectorial es igual al número de vectores que tiene una base cualquiera de ese espacio vectorial, por lo tanto, la dimension de W es igual a 3, esto es $Dim\,(W) = 3$.

$$\frac{<|>}{<|>}$$

Problema III.4: Determine si los siguientes conjuntos de vectores forman una base para el espacio vectorial dado.
a) $\left\{1-2x, x-x^2\right\}$ para P_2.
b) $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\right\}$ para M_{22}.

Solución: Recordemos que un conjunto de vectores es una base de un espacio vectorial, si este conjunto es linealmente independiente y además genera al espacio vectorial. Entonces para cada conjunto debemos verificar ambas condiciones.

a) Veamos primero si este conjunto es linealmente independiente, entonces consideremos la ecuación

$$\begin{aligned} \alpha_1 (1-2x) + \alpha_2 \left(x - x^2\right) &= 0 + 0x + 0x^2 \\ \Rightarrow \alpha_1 + (-2\alpha_1 + \alpha_2)\, x - \alpha_2 x^2 &= 0 + 0x + 0x^2 \end{aligned}$$

esta ecuación nos lleva al siguiente sistema de ecuaciones lineales homogéneo

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 0 \\ -2\alpha_1 + \alpha_2 &= 0 \\ -\alpha_2 &= 0 \end{aligned}$$

esto implica que $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, por lo tanto los vectores $\left\{1-2x, x-x^2\right\}$ son linealmente independientes.

Ahora verifiquemos si generan a P_2. Para esto consideremos la forma mas general de un vector de P_2, eso es, sea $p(x) = a + bx + cx^2 \in P_2$, así este vector se debe poder escribir como

$$\begin{aligned} \beta_1 (1-2x) + \beta_2 \left(x - x^2\right) &= a + bx + c^2 \\ \Rightarrow \beta_1 + (-2\beta_1 + \beta_2)\, x - \beta_2 x^2 &= a + bx + c^2 \end{aligned}$$

la cual conduce al siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} \beta_1 &= a \\ -2\beta_1 + \beta_2 &= b \\ -\beta_2 &= c \end{aligned}$$

al resolver con la matriz aumentada tenemos

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & a \\ -2 & 1 & b \\ 0 & -1 & c \end{array}\right) \ (R_2 \to R_2 + 2R_1) \ \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 2a+b \\ 0 & -1 & c \end{array}\right) \ (R_3 \to R_3 + R_2) \ \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 2a+b \\ 0 & 0 & 2a+b+c \end{array}\right)$$

Este sistema solamente tiene solución si se cumple que $2a + b + c = 0$, esto significa que solamente los polinomios $p(x) = a + bx + cx^2$ cuyos coeficientes satisfagan la condición podran ser generados por el conjunto $\left\{1-2x, x-x^2\right\}$, en otras palabras no genera a todo P_2.

Finalmente, el conjunto $\left\{1-2x, x-x^2\right\}$ es linealmente independiente pero no genera a P_2, por lo tanto no es una base de este espacio vectorial.

b) Verifiquemos si estos vectores son linealmente independientes, así que consideremos la ecuación

$$\begin{aligned} \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_4 & \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + 2\alpha_4 & \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 - 2\alpha_4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

la cual origina el sistema de ecuaciones lineales homogéneo siguiente

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_4 &= 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4 &= 0 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + 2\alpha_4 &= 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 - 2\alpha_4 &= 0 \end{aligned}$$

$$\frac{<|>}{<|>}$$

Como el sistema anterior es homogéneo tenemos que, si el determinante es igual a cero entonces tiene soluciones infinitas, si es distinto de cero entonces tiene solución única (la solución trivial), así que calculemos el determinante del sistema, usaremos propiedades

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} (R_2 \to R_2 - R_1) \\ (R_3 \to R_3 + R_1) \\ (R_4 \to R_4 - R_1) \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} \begin{matrix} (R_3 \to R_3 - R_2) \\ (R_4 \to R_4 - R_2) \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$(R_4 \to R_4 + R_3) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

De manera que el sistema tiene solución única, la trivial, así que $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$. Por lo tanto los vectores $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ son linealmente independientes.

Ahora veamos si estos vectores generan a M_{22}. Entonces cualquier matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{22}$ se puede escribir como

$$\begin{aligned} &\beta_1 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \beta_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \beta_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \beta_4 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ \Rightarrow &\begin{pmatrix} \beta_1 + \beta_4 & \beta_1 + \beta_2 + \beta_4 \\ -\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + 2\beta_4 & \beta_1 + \beta_2 - \beta_3 - 2\beta_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \end{aligned}$$

de donde se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} \beta_1 + \beta_4 &= a \\ \beta_1 + \beta_2 + \beta_4 &= b \\ -\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + 2\beta_4 &= c \\ \beta_1 + \beta_2 - \beta_3 - 2\beta_4 &= d \end{aligned}$$

Reoslvamos el sistema usando la matriz aumentada

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & a \\ 1 & 1 & 0 & 1 & b \\ -1 & 1 & 1 & 2 & c \\ 1 & 1 & -1 & -1 & d \end{array}\right) \begin{matrix} (R_2 \to R_2 - R_1) \\ (R_3 \to R_3 + R_1) \\ (R_4 \to R_4 - R_1) \end{matrix} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 & b-a \\ 0 & 1 & 1 & 3 & c+a \\ 0 & 1 & -1 & -2 & d-a \end{array}\right)$$

$$\begin{matrix} (R_3 \to R_3 - R_2) \\ (R_4 \to R_4 - R_2) \end{matrix} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 & b-a \\ 0 & 0 & 1 & 3 & c-b+2a \\ 0 & 0 & -1 & -2 & d-b \end{array}\right) (R_4 \to R_4 + R_3) \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 & b-a \\ 0 & 0 & 1 & 3 & c-b+2a \\ 0 & 0 & 0 & 1 & c+d-2b+2a \end{array}\right)$$

$$\begin{matrix} (R_1 \to R_1 - R_3) \\ (R_3 \to R_3 - 3R_4) \end{matrix} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -a-c-d+2b \\ 0 & 1 & 0 & 0 & b-a \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2c+5b-3d-4a \\ 0 & 0 & 0 & 1 & c+d-2b+2a \end{array}\right)$$

Esto significa que la solución es única de la forma

$$\begin{aligned} \beta_1 &= -a-c-d+2b \\ \beta_2 &= b-a \\ \beta_3 &= -2c+5b-3d-4a \\ \beta_4 &= c+d-2b+2a \end{aligned}$$

En otras palabras quiere decir que el conjunto de matrices en cuestión genera a M_{22}. tenemos entonces que el conjunto $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \right\}$ es linealmente independiente y además genera al espacio vectorial correspondiente, por lo tanto, este conjunto es una base de M_{22}.

$$\frac{<|>}{<|>}$$

Problema III.5: Consideremos los dos conjuntos de vectores en R^4, $A = \{(1, 2, -1, 3), (2, 4, 1, -2), (3, 6, 3, -7)\}$ y $B = \{(1, 2, -4, 11), (2, 4, -5, 14)\}$. Sean $V = gen(A)$ y $W = gen(B)$, mostrar que $V = W$.

Solución: Método 1) Recordemos que si $S = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ es un conjunto de vectores, entonces el subespacio vectorial generado por S esta dado por $gen(S) = \{\, u |\, u = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n\}$.
Para $V = gen(A)$ tenemos,

$$\begin{aligned} V = gen(A) = \{\,(x, y, z, w)|\,(x, y, z, w) &= \alpha_1 (1, 2, -1, 3) + \alpha_2 (2, 4, 1, -2) + \alpha_3 (3, 6, 3, -7)\} \\ \Rightarrow (x, y, z, w) &= (\alpha_1, 2\alpha_1, -\alpha_1, 3\alpha_1) + (2\alpha_2, 4\alpha_2, \alpha_2, -2\alpha_2) + (3\alpha_3, 6\alpha_3, 3\alpha_3, -7\alpha_3) \\ &= (\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3, 2\alpha_1 + 4\alpha_2 + 6\alpha_3, -\alpha_1 + \alpha_2 + 3\alpha_3, 3\alpha_1 - 2\alpha_2 - 7\alpha_3) \end{aligned}$$

ecuación que genera el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} &\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = x \\ &2\alpha_1 + 4\alpha_2 + 6\alpha_3 = y \\ &-\alpha_1 + \alpha_2 + 3\alpha_3 = z \\ &3\alpha_1 - 2\alpha_2 - 7\alpha_3 = w \end{aligned}$$

resolvamos por medio de la matriz aumentada, esto es

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & x \\ 2 & 4 & 6 & y \\ -1 & 1 & 3 & z \\ 3 & -2 & -7 & w \end{array}\right) \begin{array}{l} R_2 \to R_2 - 2R_1 \\ R_3 \to R_3 + R_1 \\ R_4 \to R_4 - 3R_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & x \\ 0 & 0 & 0 & y - 2x \\ 0 & 3 & 6 & z + x \\ 0 & -8 & -16 & w - 3x \end{array}\right) R_2 \leftrightarrow R_4 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & x \\ 0 & -8 & -16 & w - 3x \\ 0 & 3 & 6 & z + x \\ 0 & 0 & 0 & y - 2x \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} R_2 \to R_2/(-8) \\ R_3 \to R_2/(3) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & x \\ 0 & 1 & 2 & -w/8 + 3x/8 \\ 0 & 1 & 2 & z/3 + x/3 \\ 0 & 0 & 0 & y - 2x \end{array}\right) R_3 \to R_3 - R_2 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & x \\ 0 & 1 & 2 & -w/8 + 3x/8 \\ 0 & 0 & 0 & z/3 + w/8 - x/24 \\ 0 & 0 & 0 & y - 2x \end{array}\right)$$

$$R_1 \to R_1 - 2R_2 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & x/4 + w/4 \\ 0 & 1 & 2 & -w/8 + 3x/8 \\ 0 & 0 & 0 & z/3 + w/8 - x/24 \\ 0 & 0 & 0 & y - 2x \end{array}\right)$$

$$R_3, R_4 \Rightarrow z/3 + w/8 - x/24 = y - 2x \Rightarrow z/3 + w/8 + 47x/24 - y = 0$$

en otras palabras,

$$V = gen(A) = \{\,(x, y, z, w)|\, z/3 + w/8 + 47x/24 - y = 0\}$$

De la misma manera para $W = gen(B)$ tenemos

$$\begin{aligned} W = gen(B) = \{\,(x, y, z, w)|\,(x, y, z, w) &= \alpha_1 (1, 2, -4, 11) + \alpha_2 (2, 4, -5, 14)\} \\ \Rightarrow (x, y, z, w) &= (\alpha_1, 2\alpha_1, -4\alpha_1, 11\alpha_1) + (2\alpha_2, 4\alpha_2, -5\alpha_2, 14\alpha_2) \\ &= (\alpha_1 + 2\alpha_2, 2\alpha_1 + 4\alpha_2, -4\alpha_1 - 5\alpha_2, 11\alpha_1 + 14\alpha_2) \end{aligned}$$

lo que resulta en el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} &\alpha_1 + 2\alpha_2 = x \\ &2\alpha_1 + 4\alpha_2 = y \\ &-4\alpha_1 - 5\alpha_2 = z \\ &11\alpha_1 + 14\alpha_2 = w \end{aligned}$$

$$\frac{<|>}{<|>}$$

Usando la matriz aumentada para resolver el sistema anterior tenemos que

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x \\ 2 & 4 & y \\ -4 & -5 & z \\ 11 & 14 & w \end{array}\right) \begin{array}{l} R_2 \to R_2 - 2R_1 \\ R_3 \to R_3 + 4R_1 \\ R_4 \to R_4 - 11R_1 \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x \\ 0 & 0 & y-2x \\ 0 & 3 & z+4x \\ 0 & -8 & w-11x \end{array}\right) R_2 \leftrightarrow R_4 \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x \\ 0 & -8 & w-11x \\ 0 & 3 & z+4x \\ 0 & 0 & y-2x \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} R_2 \to R_2/(-8) \\ R_3 \to R_2/(3) \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x \\ 0 & 1 & -w/8+11x/8 \\ 0 & 1 & z/3+4x/3 \\ 0 & 0 & y-2x \end{array}\right) R_3 \to R_3 - R_2 \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x \\ 0 & 1 & -w/8+11x/8 \\ 0 & 0 & z/3+w/8-x/24 \\ 0 & 0 & y-2x \end{array}\right)$$

$$R_1 \to R_1 - 2R_2 \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -7x/4+w/4 \\ 0 & 1 & -w/8+11x/8 \\ 0 & 0 & z/3+w/8-x/24 \\ 0 & 0 & y-2x \end{array}\right)$$

$$R_3, R_4 \Rightarrow z/3+w/8-x/24 = y-2x \Rightarrow z/3+w/8+47x/24-y=0$$

es decir,

$$W = gen(B) = \{\,(x,y,z,w) |\, z/3+w/8+47x/24-y=0\}$$

Por lo tanto, observamos que

$$V = W$$

Método 2) Escribimos los vectores del conjunto A como renglones de una matriz, y determinamos ahora la forma escalonada reducida de esta matriz, esto es,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & -2 \\ 3 & 6 & 3 & -7 \end{pmatrix} \begin{array}{l} R_2 \to R_2 - 2R_1 \\ R_3 \to R_3 - 3R_1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -8 \\ 0 & 0 & 6 & -16 \end{pmatrix} R_3 \to R_3 - 2R_2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R_1 \to 3R_1 + R_2 \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

de tal manera que

$$V = gen\,\{(1,2,-1,3)\,,(2,4,1,-2)\,,(3,6,3,-7)\} = gen\,\{(3,6,0,1)\,,(0,0,3,-8)\}$$

Ahora repetimos el mismo procedimiento para los vectores del conjunto B, de manera que

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & -5 & 14 \end{pmatrix} R_2 \to R_2 - 2R_1 \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 8 \end{pmatrix} R_1 \to 3R_1 - R_2 \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -8 \end{pmatrix}$$

donde tenemos que

$$W = gen\,\{(1,2,-4,11)\,,(2,4,-5,14)\} = gen\,\{(3,6,0,1)\,,(0,0,3,-8)\}$$

por lo tanto concluimos que

$$V = W.$$

$$\frac{<|>}{<|>}$$

Problema III.6: Mostrar que los siguientes conjuntos de vectores son linealmente independientes, para el espacio vectorial dado,

a) $W = \left\{2x, x^3 - 3, 1 + x - 4x^3, x^3 + 18x^2 - 9\right\}$ en P_3
b) $W = \left\{2x, x^2 + 5, 2 + x - 4x^2\right\}$ en P_2
c) $W = \{\sin x, \cos x\}$ en $[-\pi, \pi]$
d) $W = \left\{x, x^{\frac{1}{2}}, x^{\frac{1}{3}}\right\}$ en $[0, 1]$

Solución: De la definición tenemos que, un conjunto de vectores $S = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ es linealmente independiente si an la ecuación $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n = 0$, se tiene que $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$.

a) Para este conjunto tenemos

$$\begin{array}{l}
\alpha_1 (2x) + \alpha_2 \left(x^3 - 3\right) + \alpha_3 \left(1 + x - 4x^3\right) + \alpha_4 \left(x^3 + 18x^2 - 9\right) = 0 + 0x + 0x^2 + 0x^3 \\
\Rightarrow 2\alpha_1 x + \alpha_2 x^3 - 3\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_3 x - 4\alpha_3 x^3 + \alpha_4 x^3 + 18\alpha_4 x^2 - 9\alpha_4 = 0 + 0x + 0x^2 + 0x^3 \\
(-3\alpha_2 + \alpha_3 - 9\alpha_4) + (2\alpha_1 + \alpha_3)\, x + (18\alpha_4)\, x^2 + (\alpha_2 - 4\alpha_3 + \alpha_4)\, x^3 = 0 + 0x + 0x^2 + 0x^3
\end{array}$$

de donde obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones lineales homogéneo

$$\begin{array}{l}
-3\alpha_2 + \alpha_3 - 9\alpha_4 = 0 \\
2\alpha_1 + \alpha_3 = 0 \\
18\alpha_4 = 0 \\
\alpha_2 - 4\alpha_3 + \alpha_4 = 0
\end{array}$$

Usemos la matriz aumentada para resolver el sistema

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -3 & 1 & -9 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 18 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_1 \leftrightarrow R_2 \\ R_3 \leftrightarrow R_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -9 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 18 & 0 \end{array}\right) R_2 \leftrightarrow R_3 \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 18 & 0 \end{array}\right)$$

$$R_3 \to R_3 + 3R_2 \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -11 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 18 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_3 \to 3R_3 + R_4 \\ R_2 \to 18R_2 + R_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & -72 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -33 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 18 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} R_3 \to R_3/-33 \\ R_4 \to R_4/18 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & -72 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_1 \to R_1 - R_3 \\ R_2 \to R_2 + 72R_3 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Esto quiere decir que el sistema tiene solución única (la solución trivial por ser homogéneo), esto es, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$. Por lo tanto, los vectores del conjunto $W = \left\{2x, x^3 - 3, 1 + x - 4x^3, x^3 + 18x^2 - 9\right\}$, son linealmente independientes.

b) Aplicando la definición de vectores independientes tenemos,

$$\begin{array}{l}
\alpha_1 (2x) + \alpha_2 \left(x^2 + 5\right) + \alpha_3 \left(2 + x - 4x^2\right) = 0 + 0x + 0x^2 \\
\Rightarrow 2\alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + 5\alpha_2 + 2\alpha_3 + \alpha_3 x - 4\alpha_3 x^2 = 0 + 0x + 0x^2 \\
(5\alpha_2 + 2\alpha_3) + (2\alpha_1 + \alpha_3)\, x + (2\alpha_2 - 4\alpha_3)\, x^2 = 0 + 0x + 0x^2
\end{array}$$

ecuación que genera el sistema de ecuaciones lineales homogéneo siguiente

$$\begin{array}{l}
5\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \\
2\alpha_1 + \alpha_3 = 0 \\
2\alpha_2 - 4\alpha_3 = 0
\end{array}$$

$$\frac{<|>}{<|>}$$

Ahora resolvamos mediante el determinante del sistema, así que

$$\begin{vmatrix} 0 & 5 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -4 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -2\,(-20-4) = -2\,(-24) = 48 \neq 0$$

Como el determinate es distinto de cero, quiere decir que la solución del sistema es única (solución trivial), por ser homogéneo, es decir, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Entonces tenemos que los vectores del conjunto $W = \left\{2x, x^2+5, 2+x-4x^2\right\}$ son linealmente independientes.

Para los siguientes incisos usaremos el Wronskiano definido como

$$W\left(f_1, f_2, f_3\right) = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ f_1' & f_2' & f_3' \\ f_1'' & f_2'' & f_3'' \end{vmatrix} \text{ donde } f' = \frac{df}{dx} \text{ y } f'' = \frac{d^2 f}{dx^2}$$

c) Para este conjunto de funciones tenemos

$$W\left(\sin x, \cos x\right) = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix} = -\sin^2 x - \cos^2 x = -1 \neq 0$$

Como el Wronskiano es distinto de cero estonces las funciones del conjunto $W = \{\sin x, \cos x\}$ son linealmente independientes.

d) En este caso tenemos que el Wronskiano esta dado de la siguiente forma

$$W\left(x, x^{\frac{1}{2}}, x^{\frac{1}{3}}\right) = \begin{vmatrix} x & x^{\frac{1}{2}} & x^{\frac{1}{3}} \\ 1 & \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} & \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} \\ 0 & -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} & -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}} \end{vmatrix} \; R_1 \leftrightarrow R_2 \;\Rightarrow W\left(x, x^{\frac{1}{2}}, x^{\frac{1}{3}}\right) = (-1) \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2\sqrt{x}} & \frac{1}{3\left(\sqrt[3]{x}\right)^2} \\ x & \sqrt{x} & \sqrt[3]{x} \\ 0 & -\frac{1}{4\left(\sqrt{x}\right)^3} & -\frac{2}{9\left(\sqrt[3]{x}\right)^5} \end{vmatrix}$$

$$R_2 \to R_2 - xR_1 \;\Rightarrow W\left(x, x^{\frac{1}{2}}, x^{\frac{1}{3}}\right) = (-1) \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2\sqrt{x}} & \frac{1}{3\left(\sqrt[3]{x}\right)^2} \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{x} & \frac{2}{3}\sqrt[3]{x} \\ 0 & -\frac{1}{4\left(\sqrt{x}\right)^3} & -\frac{2}{9\left(\sqrt[3]{x}\right)^5} \end{vmatrix}$$

$$R_2 \to 2/(\sqrt{x}R_2) \;\Rightarrow W\left(x, x^{\frac{1}{2}}, x^{\frac{1}{3}}\right) = (-1) \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2\sqrt{x}} & \frac{1}{3\left(\sqrt[3]{x}\right)^2} \\ 0 & 1 & \frac{4}{3\sqrt[6]{x}} \\ 0 & -\frac{1}{4\left(\sqrt{x}\right)^3} & -\frac{2}{9\left(\sqrt[3]{x}\right)^5} \end{vmatrix}$$

$$R_3 \to R_3 + R_1/(4(\sqrt{x})^3) \;\Rightarrow W\left(x, x^{\frac{1}{2}}, x^{\frac{1}{3}}\right) = (-1) \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2\sqrt{x}} & \frac{1}{3\left(\sqrt[3]{x}\right)^2} \\ 0 & 1 & \frac{4}{3\sqrt[6]{x}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{9\left(\sqrt[3]{x}\right)^5} \end{vmatrix} = -\frac{1}{9\left(\sqrt[3]{x}\right)^5} \neq 0$$

Como el Wronskiano es distinto de cero estonces las funciones del conjunto $W = \left\{x, x^{\frac{1}{2}}, x^{\frac{1}{3}}\right\}$ son linealmente independientes.

$$\frac{<|>}{<|>}$$

Problema III.7: Mostrar si el conjunto de vectores $\{(1,2,1),(2,1,3),(3,3,4),(1,2,0)\}$ es generador del espacio vectorial R^3

Solución: Consideremos el vector general $(x,y,z)\in R^3$, y lo escribimos como combinación lineal del conjunto en cuestión, esto es,

$$\begin{aligned}
(x,y,z) &= \alpha_1(1,2,1)+\alpha_2(2,1,3)+\alpha_3(3,3,4)+\alpha_4(1,2,0)\\
&= (\alpha_1,2\alpha_1,\alpha_1)+(2\alpha_2,\alpha_2,3\alpha_2)+(3\alpha_3,3\alpha_3,4\alpha_3)+(\alpha_4,2\alpha_4,0)\\
&= (\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3+\alpha_4, 2\alpha_1+\alpha_2+3\alpha_3+2\alpha_4, \alpha_1+3\alpha_2+4\alpha_3)
\end{aligned}$$

de donde obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{array}{l} x=\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3+\alpha_4\\ y=2\alpha_1+\alpha_2+3\alpha_3+2\alpha_4\\ z=\alpha_1+3\alpha_2+4\alpha_3\end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1&2&3&1&x\\ 2&1&3&2&y\\ 1&3&4&0&z\end{array}\right) \begin{array}{l}(R_2-2R_1\to R_2)\\(R_3-R_1\to R_3)\end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1&2&3&1&x\\ 0&-3&-3&0&y-2x\\ 0&1&1&-1&z-x\end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l}(R_2-2R_1\to R_2)\\(R_3-R_1\to R_3)\end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1&2&3&1&x\\ 0&-3&-3&0&y-2x\\ 0&1&1&-1&z-x\end{array}\right) R_2\leftrightarrow R_3 \left(\begin{array}{cccc|c} 1&2&3&1&x\\ 0&1&1&-1&z-x\\ 0&-3&-3&0&y-2x\end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l}(R_1-2R_2\to R_1)\\(R_3+3R_2\to R_3)\end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1&0&1&3&3x-2z\\ 0&1&1&-1&z-x\\ 0&0&0&-3&y-5x-z\end{array}\right) \begin{array}{l}(R_1+R_3\to R_1)\\(3R_2-R_3\to R_2)\end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1&0&1&0&-2x+y-3z\\ 0&1&1&0&2x-y+4z\\ 0&0&0&-3&y-5x-z\end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ll} & \alpha_1=-2x+y-3z-\alpha_3\\ \Rightarrow & \alpha_2=2x-y+4z-\alpha_3\\ & \alpha_4=-(y-5x-z)/3\end{array}$$

como el sistema tiene solución (soluciones infinitas), entonces existen los escalares α_1, α_2, α_3 y α_4 para poder escribir cualquier vector arbitrario de R^3 como combinación lineal del conjunto $\{(1,2,1),(2,1,3),(3,3,4),(1,2,0)\}$, por lo tanto, este conjunto es generador del espacio vectorial R^3.

Problema III.8: Encuentre una base para el conjunto de vectores que se encuentran en el plano $2x-y-z=0$.

Solución: Este conjunto se puede escribir como $P=\{(x,y,z)|\,2x-y-z=0\}$, donde $(x,y,z)\in R^3$. Como necesitamos una base para este conjunto, entonces el plano $2x-y-z=0$ se puede ver como una ecuación homogénea con tres incognitas, que al resolver tenemos

$$\begin{array}{l} 2x-y-z=0\Rightarrow x=y/2+z/2\\ \Rightarrow y=\alpha \text{ y } z=\beta, \text{ donde } \alpha,\beta\in R \text{ son parámetros libres}\\ \Rightarrow x=\alpha/2+\beta/2\\ (x,y,z)=(\alpha/2+\beta/2,\alpha,\beta)=\alpha(1/2,1,0)+\beta(1/2,0,1)\end{array}$$

así, los vectores $(1/2,1,0)$ y $\beta(1/2,0,1)$ generam al plano y ademas son linealmente independientes, por lo tanto, una base para todos los vectores que estan sobre el plano es el conjunto

$$\{(1/2,1,0),(1/2,0,1)\}$$

de modo que $Dim(P)=2$.

$$\frac{<|>}{<|>}$$

Problema III.9: Sea $S = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ un conjunto de vectores en R^4, donde $v_1 = (1, 2, -2, 1)$, $v_2 = (-3, 3, -9, 6)$, $v_3 = (2, 1, 1, -1)$, $v_4 = (-3, 0, -4, 5)$ y $v_5 = (9, 3, 7, -6)$. Determinar una base para el conunto generado por S.

Solución: Supngamos que

$$W = gen(S) = \{\, u |\, u = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \alpha_4 v_4 + \alpha_5 v_5\}$$

entonces debemos hallar una base para W.

El procedimiento es, primero colocar los vectores como columnas de una matriz, después transformamos la matriz a su forma escalonada reducida, y las columnas que tengan "unos principales", corresponden a los vectores que forman la base. De esta manera tenemos

$$\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & -3 & 9 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 3 \\ -2 & -9 & 1 & -4 & 7 \\ 1 & 6 & -1 & 5 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} (R_2 - 2R_1 \to R_2) \\ (R_3 + 2R_1 \to R_3) \\ (R_4 - R_1 \to R_4) \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & -3 & 9 \\ 0 & 9 & -3 & 6 & -15 \\ 0 & -15 & 5 & -10 & 25 \\ 0 & 9 & -3 & 8 & -15 \end{pmatrix}$$

$$(R_2/3 \to R_2) \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & -3 & 9 \\ 0 & 3 & -1 & 2 & -5 \\ 0 & -15 & 5 & -10 & 25 \\ 0 & 9 & -3 & 8 & -15 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} (R_1 + R_2 \to R_1) \\ (R_3 + 5R_2 \to R_3) \\ (R_4 - 3R_2 \to R_4) \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & -1 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(R_4/2 \to R_4) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & -1 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} (R_1 + R_4 \to R_1) \\ (R_2 - 2R_4 \to R_2) \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(R_2/3 \to R_2) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1/3 & 0 & -5/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Así, las columnas con unos principales corresponden a los vectores v_1, v_2 y v_4.
Por lo tanto, $\{v_1, v_2, v_4\}$ es una base para $W = gen(S)$ y entonces $Dim(W) = Dim(gen(S)) = 3$.

Observación, los vectores se pueden colocar como columnas de la matriz en cualquier orden, posiblemente esto cambie los vectores de la base, pero lo que no varía es el número de vectores de la base, siempre seran tres.

$$\frac{<|>}{<|>}$$

Problema III.10: Consideremos los vectores $u_1 = (2, -2, 6)$ y $u_2 = (-4, 1, 6)$ del espacio vectorial R^3. Detreminar el espacio vectorial generado por estos vectores.

Solución: Debemos hallar el espacio $V = gen\{u_1, u_2\} = \{v | v = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2\}$, sea $v = (x, y, z) \in V$, entonces

$$\begin{aligned} & v = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 \Rightarrow (x, y, z) = \alpha_1(2, -2, 6) + \alpha_2(-4, 1, 6) = (2\alpha_1, -2\alpha_1, 6\alpha_1) + (-4\alpha_2, \alpha_2, 6\alpha_2) \\ & \Rightarrow (x, y, z) = (2\alpha_1 - 4\alpha_2, -2\alpha_1 + \alpha_2, 6\alpha_1 + 6\alpha_2) \end{aligned}$$

ecuación que genera el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} & 2\alpha_1 - 4\alpha_2 = x \\ & -2\alpha_1 + \alpha_2 = y \\ & 6\alpha_1 + 6\alpha_2 = z \end{aligned}$$

resolviendo por medio de la matriz aumentada, resulta

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -4 & x \\ -2 & 1 & y \\ 6 & 6 & z \end{array}\right) \begin{array}{l} (R_2 + R_1 \to R_2) \\ (R_3 - 3R_1 \to R_3) \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -4 & x \\ 0 & -3 & y + x \\ 0 & 18 & z - 3x \end{array}\right)$$

$$(R_3 + 6R_2 \to R_3) \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -4 & x \\ 0 & -3 & y + x \\ 0 & 0 & z + 3x + 6y \end{array}\right)$$

$$(R_2/(-3) \to R_2) \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -4 & x \\ 0 & 1 & -(y + x)/3 \\ 0 & 0 & z + 3x + 6y \end{array}\right)$$

$$(R_1 + 4R_2 \to R_1) \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & -(x - 4y)/3 \\ 0 & 1 & -(y + x)/3 \\ 0 & 0 & z + 3x + 6y \end{array}\right)$$

$$(R_1/2 \to R_1) \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -(x - 4y)/6 \\ 0 & 1 & -(y + x)/3 \\ 0 & 0 & z + 3x + 6y \end{array}\right)$$

De la solución tenemos que,

$$R_3 \Rightarrow z + 3x + 6y = 0$$

Por lo tanto, el espacio generado por los vectores $u_1 = (2, -2, 6)$ y $u_2 = (-4, 1, 6)$, es el plano $z + 3x + 6y = 0$, el cual pasa por el origen, de otra manera

$$V = gen\{u_1, u_2\} = \{(x, y, z) | \, 3x + 6y + z = 0\}$$

En general, cualquier par de vectores en R^3 genera un plano que pasa por el origen de coordenadas.

$$\frac{<\,|\,>}{<\,|\,>}$$

Problema III.11: Sean $u_1 = (1,0,1,0)$ y $u_2 = (-1,1,-1,0)$ dos vectores linealmente independientes de R^4. Construir una base para R^4 que contenga a los vectores u_1 y u_2.

Solución: Sabemos que una base de R^4 debe contener cuatro vectores, de manera que para acompletar la base deseada nos restan dos vectores que sean linealmente independientes entre si y con los dos que tenemos.

Los dos vectores faltantes los tomaremos de la base canónica de R^4, esto es, del conjunto $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ donde $e_1 = (1,0,0,0)$, $e_2 = (0,1,0,0)$, $e_3 = (0,0,1,0)$ y $e_4 = (0,0,0,1)$.

Ahora colocamos los seis vectores como columnas de una matriz y esta la transformamos a su forma escalonada reducida, las columnas con unos principales serán los vectores base de R^4, colocamos como primeras dos columnas a los vectores u_1 y u_2, y en estas columnas obtenemos un uno principal para asugurar estos vectores esten en la base.

Entonces tenemos

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(R_3 - R_1 \to R_3) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(R_1 + R_2 \to R_1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

esta última matriz es la reducida, vemos que hay unos principales en las columnas 1, 2, 5 y 6, estas corresponden al conjunto de vectores $\{u_1, u_2, e_3, e_4\}$.

Por lo tanto, una base de R^4 esta formada por los vectores $\{(1,0,1,0), (-1,1,-1,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1)\}$.

Podemos obtener otras columnas con unos principales, por ejemplo, de la última matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} (R_1 + R_3 \to R_1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$((-1)R_3 \to R_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donde ahora los unos principales estan en las columnas que corresponden a los vectores $\{u_1, u_2, e_1, e_4\}$, por lo cual, la base en este caso esta formada por el conjunto $\{(1,0,1,0), (-1,1,-1,0), (1,0,0,0), (0,0,0,1)\}$.

$$\frac{<|>}{<|>}$$

Problema III.12: Encuentre una base para el espacio solución del sistema de ecuaciones lineales homegéneo siguiente,

$$\begin{aligned} 2x - 6y + 4z &= 0 \\ -x + 3y - 2z &= 0 \\ -3x + 9y - 6z &= 0 \end{aligned}$$

Solución: Tenemos que encontrar los vectores que generan a la solución del sistema, entonces primero resolvemso el sistema

$$\begin{aligned} 2x - 6y + 4z &= 0 \\ -x + 3y - 2z &= 0 \\ -3x + 9y - 6z &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -6 & 4 & 0 \\ -1 & 3 & -2 & 0 \\ -3 & 9 & -6 & 0 \end{array}\right) (R_1/2 \to R_1) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & -2 & 0 \\ -3 & 9 & -6 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} R_2 + R_1 \to R_2 \\ R_3 + 3R_1 \to R_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

de donde la solución esta dada por

$$R_1 \Rightarrow x = 3y - 2z \Rightarrow x = 3\alpha - 2\beta \quad \text{donde } \alpha, \beta \in R, \text{ son parametros libres}$$

Entonces podemos escribir la solución del sistema como

$$(x, y, z) = (3\alpha - 2\beta, \alpha, \beta) = \alpha(3, 1, 0) + \beta(-2, 0, 1)$$

esto significa que cualquier solución del sistema se puede escribir como combinación de los vectores $\{(3, 1, 0), (-2, 0, 1)\}$, es decir, estos vectores generan al espacio solución.

Checamos ahora si son linealmente independientes,

$$\begin{aligned} &\alpha_1(3, 1, 0) + \alpha_2(-2, 0, 1) = (0, 0, 0) \\ &\Rightarrow (3\alpha_1, \alpha_1, 0) + (-2\alpha_2, 0, \alpha_2) = (3\alpha_1 - 2\alpha_2, \alpha_1, \alpha_2) = (0, 0, 0) \\ &\Rightarrow \begin{array}{l} 3\alpha_1 - 2\alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \end{array} \end{aligned}$$

como la solución es única (solución trivial $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$) entonces los vecores son linealmente independientes.

Por lo tanto, el conjunto de vectores $\{(3, 1, 0), (-2, 0, 1)\}$ genera a la solución del sistema de euaciones y además es linealmente independiente, entonces es una base para el espacio solución.

Cualquier multiplo de estos vectores, también será una base para el espacio solución del sistema de ecuaciones lineales.

$$\frac{<\,|\,>}{<\,|\,>}$$

Problema III.13: Determine si el siguiente conjunto de vectores $\left\{1-x, 3-x^2, x\right\}$ forma o no una base para el espacio vectorial P_2.

Solución: Para saber si este conjunto es base de P_2, debemos probar que es un conjunto que genera a P_2 y además que son vectores linealmente independientes.

Verifiquemos si es o no un conjunto generador, cualquier vector arbitrario $a_0+a_1x+a_2x^2 \in P_2$, debe poder escribirse como combinación lineal del conjunto de vectores $\left\{1-x, 3-x^2, x\right\}$, esto es,

$$\begin{aligned} a_0 + a_1x + a_2x^2 &= \alpha_1(1-x) + \alpha_2(3-x^2) + \alpha_3 x \\ &= (\alpha_1 + 3\alpha_2) + (-\alpha_1 + \alpha_3)x - \alpha_2 x^2 \end{aligned}$$

de donde obtenemos el sisguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{array}{lcl} \alpha_1 + 3\alpha_2 = a_0 & & \alpha_1 = a_0 + 3a_2 \\ -\alpha_1 + \alpha_3 = a_1 & \Rightarrow & \alpha_2 = -a_2 \\ -\alpha_2 = a_2 & & \alpha_3 = a_0 + a_1 + 3a_2 \end{array}$$

Como el sistema tiene solución, entonces el conjunto de vectores genera a cualquier vector de P_2.

Chequemos ahora si este conjunto de vectores es linealmente independiente, mediante el determinate tenemos

$$1-x = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad 3-x^2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

entonces

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

si el determinate es distinto de cero, quiere decir que los vectores son linealemente independientes.

Por lo tanto, si el conjunto de vectores $\left\{1-x, 3-x^2, x\right\}$ genera a P_2 y el linealmente independiente entonces es una base para el espacio vectorial en cuestion.

$$\frac{<|>}{<|>}$$

Problema III.14: Si $S = \{t^2+t+1, t^2+2t+3, t^2+1\}$ y $T\,\{t+1, t^2, t^2+1\}$ son dos bases del espacio vectorial P_2, determinar las matrices de transición de la base T a la base S ($P_{T\to S}$) y de la base S a la base T ($Q_{S\to T}$).

Solución: Método A) Para obtener la matriz ($P_{T\to S}$), escribimos los vectores de la base T en términos de los vectores de la base S, esto es,

$$\begin{aligned} t+1 &= a_{11}(t^2+t+1)+a_{21}(t^2+2t+3)+a_{31}(t^2+1) \\ &= (a_{11}+a_{21}+a_{31})t^2+(a_{11}+2a_{21})t+(a_{11}+3a_{21}+a_{31}) \end{aligned}$$

obteniendose el siguiente sistema de ecuaciones lineales, con su correspondiente solución,

$$\begin{array}{lcl} 0 = a_{11}+a_{21}+a_{31} & & a_{11}=0 \\ 1 = a_{11}+2a_{21} & \Rightarrow & a_{21}=1/2 \\ 1 = a_{11}+3a_{21}+a_{31} & & a_{31}=-1/2 \end{array}$$

De la misma forma

$$\begin{aligned} t^2 &= a_{12}(t^2+t+1)+a_{22}(t^2+2t+3)+a_{32}(t^2+1) \\ &= (a_{12}+a_{22}+a_{32})t^2+(a_{12}+2a_{22})t+(a_{12}+3a_{22}+a_{32}) \end{aligned}$$

ecuación que origina el sistema de ecuaciones lineales siguiente, con su respectiva solución,

$$\begin{array}{lcl} 1 = a_{12}+a_{22}+a_{32} & & a_{12}=1 \\ 0 = a_{12}+2a_{22} & \Rightarrow & a_{22}=-1/2 \\ 0 = a_{12}+3a_{22}+a_{32} & & a_{32}=1/2 \end{array}$$

Finalmente también

$$\begin{aligned} t^2+1 &= a_{13}(t^2+t+1)+a_{23}(t^2+2t+3)+a_{33}(t^2+1) \\ &= (a_{13}+a_{23}+a_{33})t^2+(a_{13}+2a_{23})t+(a_{13}+3a_{23}+a_{33}) \end{aligned}$$

de la cual tenemos

$$\begin{array}{lcl} 1 = a_{13}+a_{23}+a_{33} & & a_{13}=0 \\ 0 = a_{13}+2a_{23} & \Rightarrow & a_{23}=0 \\ 1 = a_{13}+3a_{23}+a_{33} & & a_{33}=1 \end{array}$$

Por lo tanto la matriz de cambio de base o de transición de la base T a la base S es,

$$P_{T\to S} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

Método B) Construimos una matriz doble que contenga a los vectores de ambas bases (dispuestos como columnas) y transformamos la matriz de la base S a la identidad y la matriz de la base T sera la matriz de cambio de base $P_{T\to S}$. Esto es,

$$(Base\ S|\,Base\ T) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} R_2-R_1\to R_2 \\ R_3-R_1\to R_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$R_3/2 \leftrightarrow R_2 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{c} R_1-R_2\to R_1 \\ R_3-R_2\to R_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -1/2 & 3/2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1/2 & -1/2 & -1 \end{array}\right)$$

$$R_1+R_3\to R_1 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1/2 & -1/2 & -1 \end{array}\right) -R_3\to R_3 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 1/2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\frac{<|>}{<|>}$$

Por lo tanto, la matriz de transición de la base T a la base S es,

$$P_{T\to S}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

Método A) Para obtener la matriz $Q_{S\to T}$, escribimos los vectores de la base S en términos de los vectores de la base T, esto es,

$$\begin{aligned} t^2+t+1 &= a_{11}(t+1)+a_{21}(t^2)+a_{31}(t^2+1) \\ &= (a_{21}+a_{31})t^2+(a_{11})t+(a_{11}+a_{31}) \end{aligned}$$

obteniendose el siguiente sistema de ecuaciones lineales, con su correspondiente solución,

$$\begin{array}{lcl} 1=a_{21}+a_{31} & & a_{11}=1 \\ 1=a_{11} & \Rightarrow & a_{21}=1 \\ 1=a_{11}+a_{31} & & a_{31}=0 \end{array}$$

De la misma forma

$$\begin{aligned} t^2+2t+3 &= a_{12}(t+1)+a_{22}(t^2)+a_{32}(t^2+1) \\ &= (a_{22}+a_{32})t^2+(a_{12})t+(a_{12}+a_{32}) \end{aligned}$$

ecuación que origina el sistema de ecuaciones lineales siguiente, con su respectiva solución,

$$\begin{array}{lcl} 1=a_{22}+a_{32} & & a_{12}=2 \\ 2=a_{12} & \Rightarrow & a_{22}=0 \\ 3=a_{12}+a_{32} & & a_{32}=1 \end{array}$$

Finalmente también

$$\begin{aligned} t^2+1 &= a_{13}(t+1)+a_{23}(t^2)+a_{33}(t^2+1) \\ &= (a_{23}+a_{33})t^2+(a_{13})t+(a_{13}+a_{33}) \end{aligned}$$

de la cual tenemos

$$\begin{array}{lcl} 1=a_{23}+a_{33} & & a_{13}=0 \\ 0=a_{13} & \Rightarrow & a_{23}=0 \\ 1=a_{13}+a_{33} & & a_{33}=1 \end{array}$$

Por lo tanto la matriz de cambio de base o de transición de la base T a la base S es,

$$Q_{S\to T}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{<|>}{<|>}$$

Método B) Construimos una matriz doble que contenga a los vectores de ambas bases (dispuestos como columnas) y transformamos la matriz de la base T a la identidad y la matriz de la base S sera la matriz de cambio de base $Q_{S\to T}$. Esto es,

$$(\,Base\ S|\,Base\ T) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \; R_1 \leftrightarrow R_2 \; \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$R_3 - R_1 \to R_3 \; \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \; R_2 - R_3 \to R_2 \; \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Por lo tanto, la matriz de transición de la base S a la base T es,

$$Q_{S\to T} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Se debe cumplir para estas dos matrices que $(P_{T\to S}) \cdot (Q_{S\to T}) = I$, verifiquemos

$$(P_{T\to S}) \cdot (Q_{S\to T}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

< | >

< | >

Problema III.15: Considere las siguientes bases del espacio vectorial R^3, $S = \{(0,-2,3),(0,1,1),(1,1,0)\}$ y $T = \{(0,-1,1),(0,3,0),(1,-1,1)\}$. Sean $[u]_T = (2,1,3)$ y $[v]_S = (-1,4,1)$ dos vectores escritos en términos de las bases S y T respectivamente.

a) Determine la matriz de transición de la base T a la base S.
b) Encuentre $[u]_S$.
c) Determine la matriz de transición de la base S a la base T.
d) Encuentre $[v]_T$.

Solución: Para encontrar las matrices de transición usaremos las matrices dobles, las cuales contienen a las dos bases.

a) Para la matriz $P_{T\to S}$ tenemos,

$$(\,Base\ S|\,Base\ T) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & -1 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \; R_1 \leftrightarrow R_3 \; \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$R_1/3 \to R_1 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ -2 & 1 & 1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \; R_2 + 2R_1 \to R_2 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 5/3 & 1 & -1/3 & 3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$R_2 - R_3 \to R_2 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 5/3 & 0 & -1/3 & 3 & -4/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \; 3R_2/5 \to R_2 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & -1/5 & 9/5 & -4/5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$R_1 - R_2/3 \to R_1 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2/5 & -3/5 & 3/5 \\ 0 & 1 & 0 & -1/5 & 9/5 & -4/5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Por lo tanto,

$$P_{T\to S} = \begin{pmatrix} 2/5 & -3/5 & 3/5 \\ -1/5 & 9/5 & -4/5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) $[u]_T = (2,1,3)$ significa que el vector u esta escrito en terminos de la base T, esto es,

$$u = 2(0,-1,1) + 1(0,3,0) + 3(1,-1,1) = (0,-2,2) + (0,3,0) + (3,-3,3) = (3,-2,5)$$

ahora ya tenemos al vector u en términos de la base canónica, y lo podemos escribir en términos de la base S, esto es,

$$\begin{aligned} u &= (3,-2,5) = \alpha_1(0,-2,3) + \alpha_2(0,1,1) + \alpha_3(1,1,0) \\ &= (\alpha_3, -2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, 3\alpha_1 + \alpha_2) \end{aligned}$$

de donde se obtiene el sistema de ecuaciones lineales y su solución

$$\begin{array}{lcl} 3 = \alpha_3 & & \alpha_1 = 2 \\ -2 = -2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 & \Rightarrow & \alpha_2 = -1 \\ 5 = 3\alpha_1 + \alpha_2 & & \alpha_3 = 3 \end{array}$$

Por lo tanto,

$$[u]_S = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (2,-1,3)$$

$$\frac{<|>}{<|>}$$

Otra manera de obtener este vector es, mediante la matriz $P_{T\to S}$, ya que esta transforma un vector de la base T a la base S, de la siguiente forma

$$[u]_S = (P_{T\to S})\,[u]_T = \begin{pmatrix} 2/5 & -3/5 & 3/5 \\ -1/5 & 9/5 & -4/5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

c) Para la matriz $Q_{S\to T}$ tenemos,

$$(\,Base\ S|\,Base\ T) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & -1 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) R_1 \leftrightarrow R_3 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$R_2 + R_1 \to R_2 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) R_1 - R_3 \to R_1 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$R_2/3 \to R_2 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 2/3 & 1/3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Por lo tanto,

$$Q_{S\to T} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1/3 & 2/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

d) $[v]_S = (-1, 4, 1)$ significa que el vector v esta escrito en terminos de la base S, esto es,

$$v = -1(0,-2,3) + 4(0,1,1) + 1(1,1,0) = (0,2,-3) + (0,4,4) + (1,1,0) = (1,7,1)$$

ahora ya tenemos al vector u en términos de la base canónica, y lo podemos escribir en términos de la base T, esto es,

$$\begin{aligned} u &= (1,7,1) = \alpha_1(0,-1,1) + \alpha_2(0,3,0) + \alpha_3(1,-1,1) \\ &= (\alpha_3, -\alpha_1 + 3\alpha_2 - \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_3) \end{aligned}$$

de donde se obtiene el sistema de ecuaciones lineales y su solución

$$\begin{array}{lcl} 1 = \alpha_3 & & \alpha_1 = 0 \\ 7 = -\alpha_1 + 3\alpha_2 - \alpha_3 & \Rightarrow & \alpha_2 = 8/3 \\ 1 = \alpha_1 + \alpha_3 & & \alpha_3 = 1 \end{array}$$

Por lo tanto,

$$[u]_S = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (0, 8/3, 1)$$

Otra manera de obtener este vector es, mediante la matriz $P_{T\to S}$, ya que esta transforma un vector de la base T a la base S, de la siguiente forma

$$[u]_S = (Q_{S\to T})\,[v]_S = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1/3 & 2/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8/3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Solo para verificar nuestros resultados de las matrices tenemos que

$$(P_{T\to S})(Q_{S\to T}) = \begin{pmatrix} 2/5 & -3/5 & 3/5 \\ -1/5 & 9/5 & -4/5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1/3 & 2/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{<|>}{<|>}$$

Problema III.16: Sean $S = \{v_1, v_2, v_3\}$ y $T = \{w_1, w_2, w_3\}$ dos bases del espacio vectorial R^3, donde $v_1 = (1, 0, 1)$, $v_2 = (-1, 0, 0)$ y $v_3 = (0, 1, 2)$. Si la matriz de cambio de la base T a la base S esta dada por

$$P_{T\to S} = \begin{pmatrix} -2 & -5 & -2 \\ -1 & -6 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

determinar los vectores de la base T.

Solución: Método A) Sabemos que las columnas de la matriz de transición $P_{T\to S}$ son los vectores de la base T, escritos en términos de los vectores de la base S, (ver **Problema III.7** MétodoA)**),** esto es,

$$[w_1]_S = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad [w_2]_S = \begin{pmatrix} -5 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad [w_3]_S = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

por lo tanto, tenemos que

$$w_1 = (-2)(1, 0, 1) + (-1)(-1, 0, 0) + (1)(0, 1, 2) = (-1, 1, 0)$$

$$w_2 = (-5)(1, 0, 1) + (-6)(-1, 0, 0) + (2)(0, 1, 2) = (1, 2, -1)$$

$$w_3 = (-2)(1, 0, 1) + (-2)(-1, 0, 0) + (1)(0, 1, 2) = (0, 1, 0)$$

Por lo tanto, los vectores de la base T estan dados por: $w_1 = (-1, 1, 0)$, $w_2 = (1, 2, -1)$ y $w_3 = (0, 1, 0)$.

Método B) Construimos una metriz doble, en una colocamos la matriz identidad y en la otra la matriz de transición $P_{T\to S}$, ahora transformamos la matriz identidad en la base S y la otra matriz automaticamente nos dara los vectores de la base T, (ver **Problema III.7** MétodoB)**),** es decir,

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & -5 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \; R_2 \leftrightarrow R_3 \; \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -6 & -2 \end{array}\right)$$

$$R_1 - R_3 \to R_1 \; \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -6 & -2 \end{array}\right)$$

$$R_3 + 2R_2 \to R_3 \; \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$$R_3 + R_1 \to R_3 \; \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Así, las columnas de la segunda matriz de la matriz doble son los vectores de la base T, estos soṅ: $w_1 = (-1, 1, 0)$, $w_2 = (1, 2, -1)$ y $w_3 = (0, 1, 0)$.

$$\frac{<|>}{<|>}$$

Problema III.17: Si conocemos $[u]_S$ (al vector u en términos de la base S), donde S es una base conocida, determine al vector u en términos de la base canónica correspondiente al espacio vectorial que se muestra para cada caso,

a) $[u]_S = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ donde $S = \{(0,1,-1),(1,0,0),(1,1,1)\}$ es una base de R^3.

b) $[u]_S = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ donde $S = \left\{x^2+1, x+1, x^2+x\right\}$ es una base de P_2.

Solución: Recordemos que si $[u]_S = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ entonces esto significa que $u = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n$ donde $S = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ es una base del espacio vectorial en cuestión. En otras palabras, escribimos al vector u como combinación lineal de los vectores de la base S, donde los coeficientes de esta combinación lineal son las componentes de vector $[u]_S$.

a) Para este caso tenemos que,

$$\begin{aligned} u &= (-1)(0,1,-1)+(1)(1,0,0)+(2)(1,1,1)=(3,1,3) \\ &= (3)(1,0,0)+(1)(0,1,0)+(3)(0,0,1) \end{aligned}$$

donde la $C = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ es la base canónica de R^3.

Por lo tanto,

$$[u]_C = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

.

Otra manera es usando la matriz de cambio de la base S a la base canónica C, colocamos los vectores de ambas bases en la matriz doble y obtenemos la matris de transición $P_{S\to C}$, esto es,

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

transformamos la matriz derecha (la base canónica) en la identidad, la cual ya tiene la forma, y la matriz izquierda sera la matriz de transición. Entonces

$$P_{S\to C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto,

$$[u]_C = (P_{S\to C})([u]_S) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\frac{<|>}{<|>}$$

b) Para este polinomio tenemos lo siguiente,

$$\begin{aligned} u &= (3)(x^2+1)+(-1)(x+1)+(-2)(x^2+x) = x^2-3x+2 \\ &= (1)x^2+(-3)x+(2)1 \end{aligned}$$

donde la $C = \{x^2, x, 1\}$ es la base canónica de P_2. Esto significa que tenemos expresado al polinomio en términos de la base canónica.

Por lo tanto, $[u]_C = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Ahora usemos la matriz de cambio de la base S a la base canónica C, nuevamente colocamos los vectores de ambas bases en la matriz doble y obtenemos la matris de transición $P_{S \to C}$, esto es,

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

transformamos la matriz derecha (la base canónica) en la identidad, la cual ya tiene la forma, y la matriz izquierda sera la matriz de transición. Entonces

$$P_{S\to C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto,

$$[u]_C = (P_{S\to C})([u]_S) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\frac{<|>}{<|>}$$

Problema III.18: Considere el conjunto de vectores $E=\{e_r,e_\theta,e_\phi\}$, vectores base en coordenadas esférica, y $C=\{e_\rho,e_\varphi,e_z\}$, vectores base en coordenadas cilíndricas, ambos conjuntos son bases del espacio vectorial R^3, donde $e_r=(\sin\theta\cos\phi,\sin\theta\sin\phi,\cos\theta)$, $e_\theta=(\cos\theta\cos\phi,\cos\theta\sin\phi,-\sin\theta)$, $e_\phi=(-\sin\phi,\cos\phi,0)$, $e_\rho=(\cos\phi,\sin\phi,0)$, $e_\varphi=(-\sin\phi,\cos\phi,0)$ y $e_z=(0,0,1)$.determinar los vectores de la base T.
Detreminar las matrices de transición o de cambio de base, de coordenadas esféricas a coordenadas cilíndricas y viceversa.

Solución: Para determinar estas matrices usaremos la matriz doble, colocando los vectores de ambas bases como columnas, y después transfromamos una de ellas en la identidad y la otra sera una matriz de transición.

De esféricas a cilíndricas $M_{E\to C}$,

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} e_\rho & e_\varphi & e_z & e_r & e_\theta & e_\phi\end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}\cos\phi & -\sin\phi & 0 & \sin\theta\cos\phi & \cos\theta\cos\phi & -\sin\phi\\ \sin\phi & \cos\phi & 0 & \sin\theta\sin\phi & \cos\theta\sin\phi & \cos\phi\\ 0 & 0 & 1 & \cos\theta & -\sin\theta & 0\end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c}((\cos\phi)R_1\to R_1)\\((\sin\phi)R_2\to R_2)\end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc}\cos^2\phi & -\sin\phi\cos\phi & 0 & \sin\theta\cos^2\phi & \cos\theta\cos^2\phi & -\sin\phi\cos\phi\\ \sin^2\phi & \cos\phi\sin\phi & 0 & \sin\theta\sin^2\phi & \cos\theta\sin^2\phi & \cos\phi\sin\phi\\ 0 & 0 & 1 & \cos\theta & -\sin\theta & 0\end{array}\right)$$

$$(R_1+R_2\to R_1)\left(\begin{array}{ccc|ccc}\cos^2\phi+\sin^2\phi & 0 & 0 & \sin\theta(\cos^2\phi+\sin^2\phi) & \cos\theta(\cos^2\phi+\sin^2\phi) & 0\\ \sin^2\phi & \cos\phi\sin\phi & 0 & \sin\theta\sin^2\phi & \cos\theta\sin^2\phi & \cos\phi\sin\phi\\ 0 & 0 & 1 & \cos\theta & -\sin\theta & 0\end{array}\right)$$

$$\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0\\ \sin^2\phi & \cos\phi\sin\phi & 0 & \sin\theta\sin^2\phi & \cos\theta\sin^2\phi & \cos\phi\sin\phi\\ 0 & 0 & 1 & \cos\theta & -\sin\theta & 0\end{array}\right)$$

$$(R_2-(\sin^2\phi)R_1\to R_2)\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & \cos\phi\sin\phi & 0 & 0 & 0 & \cos\phi\sin\phi\\ 0 & 0 & 1 & \cos\theta & -\sin\theta & 0\end{array}\right)$$

$$(R_2/(\cos\phi\sin\phi)\to R_2)\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & \cos\theta & -\sin\theta & 0\end{array}\right)$$

Por lo tanto, la matriz de transición de coordenadas esféricas a cilíndricas esta dada por

$$M_{E\to C}=\begin{pmatrix}\sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\\ \cos\theta & -\sin\theta & 0\end{pmatrix}$$

$$\frac{<|>}{<|>}$$

Ahora de cilíndricas a esféricas $M_{C\to E}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} e_r & e_\theta & e_\phi & e_\rho & e_\varphi & e_z \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \sin\theta\cos\phi & \cos\theta\cos\phi & -\sin\phi & \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\theta\sin\phi & \cos\theta\sin\phi & \cos\phi & \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$(R_1 \leftrightarrow R_3) \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \sin\theta\sin\phi & \cos\theta\sin\phi & \cos\phi & \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ \sin\theta\cos\phi & \cos\theta\cos\phi & -\sin\phi & \cos\phi & -\sin\phi & 0 \end{array}\right)$$

$$(R_1/(\cos\theta) \to R_1) \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\sin\theta/\cos\theta & 0 & 0 & 0 & 1/\cos\theta \\ \sin\theta\sin\phi & \cos\theta\sin\phi & \cos\phi & \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ \sin\theta\cos\phi & \cos\theta\cos\phi & -\sin\phi & \cos\phi & -\sin\phi & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l}(R_2 - (\sin\theta\sin\phi)R_1 \to R_2) \\ (R_3 - (\sin\theta\cos\phi)R_1 \to R_3)\end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\sin\theta/\cos\theta & 0 & 0 & 0 & 1/\cos\theta \\ 0 & \sin\phi/\cos\theta & \cos\phi & \sin\phi & \cos\phi & -\sin\theta\sin\phi/\cos\theta \\ 0 & \cos\phi/\cos\theta & -\sin\phi & \cos\phi & -\sin\phi & -\sin\theta\cos\phi/\cos\theta \end{array}\right)$$

$$((\cos\theta)R_2/(\sin\phi) \to R_2) \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\sin\theta/\cos\theta & 0 & 0 & 0 & 1/\cos\theta \\ 0 & 1 & \cos\phi\cos\theta/\sin\phi & \cos\theta & \cos\phi\cos\theta/\sin\phi & -\sin\theta \\ 0 & \cos\phi/\cos\theta & -\sin\phi & \cos\phi & -\sin\phi & -\sin\theta\cos\phi/\cos\theta \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l}(R_1 + (\sin\theta/\cos\theta)R_2 \to R_1) \\ (R_3 - (\cos\phi/\cos\theta)R_2 \to R_3)\end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \cos\phi\sin\theta/\sin\phi & \sin\theta & \sin\theta\cos\phi/\sin\phi & \cos\theta \\ 0 & 1 & \cos\phi\cos\theta/\sin\phi & \cos\theta & \cos\phi\cos\theta/\sin\phi & -\sin\theta \\ 0 & 0 & -1/\sin\phi & 0 & -1/\sin\phi & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l}(R_1 + (\cos\phi\sin\theta)R_3 \to R_1) \\ (R_2 + (\cos\phi\cos\theta)R_3 \to R_2)\end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \sin\theta & 0 & \cos\theta \\ 0 & 1 & 0 & \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 0 & -1/\sin\phi & 0 & -1/\sin\phi & 0 \end{array}\right)$$

$$((-\sin\phi)R_3 \to R_3) \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \sin\theta & 0 & \cos\theta \\ 0 & 1 & 0 & \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Así, la matriz de cambio de base de coordenadas esféricas a cilíndricas tiene la forma

$$M_{E\to C} = \begin{pmatrix} \sin\theta & 0 & \cos\theta \\ \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{<|>}{<|>}$$

Problema III.19: Encuentre una base ortonormal para el espacio solución del sistema de ecuaciones lineales homogéneo siguiente

$$\begin{aligned}
&x_1 + x_2 + 2x_4 = 0\\
&-2x_1 - 2x_2 + x_3 - 5x_4 = 0\\
&x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 0\\
&4x_1 + 4x_2 - x_3 + 9x_4 = 0
\end{aligned}$$

Solución: Reolvemos el sistema, usando la matriz aumentada

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 & 0\\ -2 & -2 & 1 & -5 & 0\\ 1 & 1 & -1 & 3 & 0\\ 4 & 4 & -1 & 9 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} (R_2 + 2R_1 \to R_2)\\ (R_3 - R_1 \to R_3)\\ (R_4 - 4R_1 \to R_4) \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} (R_3 + R_2 \to R_3)\\ (R_4 + R_2 \to R_4) \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} R_1 \Rightarrow x_1 = -x_2 - 2x_4\\ R_2 \Rightarrow x_3 = x_4 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x_2 = \alpha \in R\\ x_4 = \beta \in R \end{array} \text{son parámetros libres} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = -\alpha - 2\beta\\ x_2 = \alpha\\ x_3 = \beta\\ x_4 = \beta \end{array}$$

de manera que los vectores solución son de la forma

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-\alpha - 2\beta, \alpha, \beta, \beta) = \alpha(-1, 1, 0, 0) + \beta(-2, 0, 1, 1)$$

Entonces una base para el espacio solución es $\{(-1, 1, 0, 0), (-2, 0, 1, 1)\}$.

Ahora ortonormalizamos los vectores usando el proceso de Gram-Schmidt, esto es, sean $u_1 = (-1, 1, 0, 0)$ y $u_2 = (-2, 0, 1, 1)$ entonces

$$\begin{aligned}
v_1 &= u_1 = (-1, 1, 0, 0)\\
v_2 &= u_2 - \left(\frac{u_2 \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1}\right) v_1 = (-1, -1, 1, 1)
\end{aligned}$$

los vectores v_1 y v_2 son ortogonales, esto es, $v_1 \cdot v_2(-1, 1, 0, 0) \cdot (-1, -1, 1, 1) = 0$, normalizando

$$\begin{aligned}
w_1 &= \frac{v_1}{|v_1|} = (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0, 0)\\
w_2 &= \frac{v_2}{|v_2|} = (-1/2, -1/2, 1/4, 1/4)
\end{aligned}$$

de manera que el conjunto de vectores $\{w_1, w_2\}$ es ortonormal y es una base del espacio solución del sistema de ecuaciones lineales.

$$\frac{<|>}{<|>}$$

Problema III.20: Considere el siguiente conjunto de vectores $S = \{(1, -2, 3), (-2, 2, 2), (5/7, 4/7, 1/7)\}$, el cual es una base ortognonal de R^3. Escriba al vector $u = (12, -6, 6) \in R^3$ como cambinación lineal de los vectores de S.

Solución: Sea $v_1 = (1, -2, 3)$, $v_2 = (-2, 2, 2)$ y $v_3 = (5/7, 4/7, 1/7)$, observamos que estos vectores satisface la condición de que,

$$\begin{aligned} v_1 \cdot v_2 &= (1, -2, 3) \cdot (-2, 2, 2) = -2 - 4 + 6 = 0 \\ v_1 \cdot v_3 &= (1, -2, 3) \cdot (5/7, 4/7, 1/7) = 5/7 - 8/7 + 3/7 = 0 \\ v_2 \cdot v_3 &= (-2, 2, 2) \cdot (5/7, 4/7, 1/7) = -10/7 + 8/7 + 2/7 = 0 \end{aligned}$$

esto es, los vectores v_1, v_2 y v_3 son ortogonales. Por lo tanto, podemos escribir al vector u, de la siguiente manera

$$u = \frac{u \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} v_1 + \frac{u \cdot v_2}{v_2 \cdot v_2} v_2 + \frac{u \cdot v_3}{v_3 \cdot v_3} v_3$$

sustituyendo los vectores tenemos

$$\begin{aligned} (12, -6, 6) &= \frac{(12, -6, 6) \cdot (1, -2, 3)}{(1, -2, 3) \cdot (1, -2, 3)}(1, -2, 3) + \frac{(12, -6, 6) \cdot (-2, 2, 2)}{(-2, 2, 2) \cdot (-2, 2, 2)}(-2, 2, 2) \\ &\quad + \frac{(12, -6, 6) \cdot (5/7, 4/7, 1/7)}{(5/7, 4/7, 1/7) \cdot (5/7, 4/7, 1/7)}(5/7, 4/7, 1/7) \\ &= \frac{42}{14}(1, -2, 3) + \frac{-24}{12}(-2, 2, 2) + \frac{6}{(6/7)}(5/7, 4/7, 1/7) \\ &= 3(1, -2, 3) - 2(-2, 2, 2) + 7(5/7, 4/7, 1/7) \end{aligned}$$

Por lo tanto, tenemos que u escrito como combinación lineal de v_1, v_2 y v_3, tiene la forma

$$u = 3v_1 - 2v_2 + 7v_3$$

Problema III.21: Sea el conjunto de vectores $S = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base ortonormal del espacio vectorial R^3, donde $v_1 = (2/3, -2/3, 1/3)$, $v_2 = (2/3, 1/3, -2/3)$ y $v_3 = (1/3, 2/3, 2/3)$. Si $u = (3, 4, 5) \in R^3$, determinar de $[u]_S$.

Solución: Tenemos que determinar los coeficientes escalares α_1, α_2 y α_3 tales que

$$u = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 \Rightarrow [u]_S = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$$

Usando el hecho de que S es una base ortonormal, entonces los coeficientes de la combinación lineal estan dados por

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= u \cdot v_1 = (3, 4, 5) \cdot (2/3, -2/3, 1/3) = \frac{6}{3} - \frac{8}{3} + \frac{5}{3} = \frac{3}{3} = 1 \\ \alpha_2 &= u \cdot v_2 = (3, 4, 5) \cdot (2/3, 1/3, -2/3) = \frac{6}{3} + \frac{4}{3} - \frac{10}{3} = \frac{0}{3} = 0 \\ \alpha_3 &= u \cdot v_3 = (3, 4, 5) \cdot (1/3, 2/3, 2/3) = \frac{3}{3} + \frac{8}{3} + \frac{10}{3} = \frac{21}{3} = 7 \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$[u]_S = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\frac{<|>}{<|>}$$

Problema III.22: Dada la base $S = \{v_1, v_2, v_3\}$ del espacio vectorial R^3, donde $v_1 = (1, -1, 1)$, $v_2 = (-2, 3, -1)$ y $v_3 = (1, 2, -4)$. Determine una base ortonormal de R^3 usando la base de vectores de S.

Solución: Aplicamos el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt, esto es,

$$u_1 = v_1 = (1, -1, 1)$$

después

$$\begin{aligned}
u_2 &= v_2 - \frac{v_2 \cdot u_1}{u_1 \cdot u_1} u_1 \\
&= (-2, 3, -1) - \frac{(-2, 3, -1) \cdot (1, -1, 1)}{(1, -1, 1) \cdot (1, -1, 1)}(1, -1, 1) = (-2, 3, -1) - \frac{-6}{3}(1, -1, 1) \\
&= (0, 1, 1)
\end{aligned}$$

finalmente

$$\begin{aligned}
u_3 &= v_3 - \frac{v_3 \cdot u_1}{u_1 \cdot u_1} u_1 - \frac{v_3 \cdot u_2}{u_2 \cdot u_2} u_2 \\
&= (1, 2, -4) - \frac{(1, 2, -4) \cdot (1, -1, 1)}{(1, -1, 1) \cdot (1, -1, 1)}(1, -1, 1) - \frac{(1, 2, -4) \cdot (0, 1, 1)}{(0, 1, 1) \cdot (0, 1, 1)}(0, 1, 1) \\
&= (1, 2, -4) - \frac{-5}{3}(1, -1, 1) - \frac{-2}{2}(0, 1, 1) \\
&= (8/3, 4/3, -4/3)
\end{aligned}$$

De esta manera, el conjunto de vectores $\{u_1, u_2, u_3\}$ es una base ortogonal de R^3, así que solo normalizamos estos vectores,

$$\begin{aligned}
w_1 &= \frac{u_1}{|u_1|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \\
w_2 &= \frac{u_2}{|u_2|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 1) = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\
w_3 &= \frac{u_3}{|u_3|} = \frac{3}{\sqrt{96}}(8/3, 4/3, -4/3) = \left(\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}\right)
\end{aligned}$$

entonces tenemos que el conjunto de vectores $\{w_1, w_2, w_3\}$, es una base ortonormal del espacio vectorial R^3, de modo que satisface las condiciones

$$\begin{aligned}
w_1 \cdot w_2 &= 0 \\
w_1 \cdot w_3 &= 0 \\
w_2 \cdot w_3 &= 0
\end{aligned}$$

y también

$$\begin{aligned}
w_1 \cdot w_1 &= 1 \\
w_2 \cdot w_2 &= 1 \\
w_3 \cdot w_3 &= 1
\end{aligned}$$

$$\frac{<|>}{<|>}$$

Problema III.23: Construir una base ortonormal para el espacio vectorial P_2, en el intervalo $[0,1]$.

Solución: Consideremos la base canónica de P_2, esto es, el conjunto de vectores $\left\{1, x, x^2\right\}$ y tememos la siguiente notación $u_1 = 1$, $u_2 = x$ y $u_3 = x^2$. Entonces tenemos que

$$u_1 = 1 \Rightarrow w_1 = \langle u_1, u_1 \rangle = \int_0^1 (u_1)(u_1)dx = \int_0^1 (u_1)^2 dx = \int_0^1 (1)^2 dx = 1$$

normalizando el vector se obtiene,

$$v_1 = \frac{w_1}{|w_1|} = \frac{w_1}{\sqrt{\langle w_1, w_1 \rangle}} = \frac{1}{1} = 1$$

Ahora, para el siguiente vector,

$$u_2 = x \Rightarrow w_2 = u_2 - \langle u_2, v_1 \rangle v_1 = x - \left(\int_0^1 (x)(1)dx \right)(1) = x - \frac{1}{2}$$

para normalizar tenemos que

$$\begin{aligned} v_2 &= \frac{w_2}{|w_2|} = \frac{w_2}{\sqrt{\langle w_2, w_2 \rangle}} = \frac{x - \frac{1}{2}}{\left[\int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 dx \right]^{1/2}} = \frac{x - \frac{1}{2}}{\left[\int_0^1 (x^2 - x + \frac{1}{4}) dx \right]^{1/2}} \\ &= \frac{x - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2\sqrt{3}}} = 2\sqrt{3}\left(x - \frac{1}{2}\right) = \sqrt{3}(2x - 1) \end{aligned}$$

Finalmente el tercer para el tercer vector,

$$\begin{aligned} u_3 &= x^2 \Rightarrow w_3 = u_3 - \langle u_3, v_1 \rangle v_1 - \langle u_3, v_2 \rangle v_2 \\ &= x^2 - \left(\int_0^1 (x^2)(1)dx \right)(1) - \left(\int_0^1 (x^2)\left(\sqrt{3}(2x-1)\right) dx \right)\left(\sqrt{3}(2x-1)\right) \\ &= x^2 - \frac{1}{3} - \sqrt{3}\left(\int_0^1 (2x^3 - x^2)dx \right)\left(\sqrt{3}(2x-1)\right) = x^2 - \frac{1}{3} - \sqrt{3}\left(\frac{1}{6}\right)\left(\sqrt{3}(2x-1)\right) \\ &= x^2 - x + \frac{1}{6} \end{aligned}$$

normalizando tenemos

$$\begin{aligned} v_3 &= \frac{w_3}{|w_3|} = \frac{w_3}{\sqrt{\langle w_3, w_3 \rangle}} = \frac{x^2 - x + \frac{1}{6}}{\left[\int_0^1 \left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right)^2 dx \right]^{1/2}} = \frac{x^2 - x + \frac{1}{6}}{\left[\int_0^1 \left(x^4 - 2x^3 + \frac{4}{3}x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{36}\right) dx \right]^{1/2}} \\ &= \frac{x^2 - x + \frac{1}{6}}{\frac{1}{6\sqrt{5}}} = 6\sqrt{5}\left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right) = \sqrt{5}(6x^2 - 6x + 1). \end{aligned}$$

Por lo tanto, la base ortonormal para el espacio vectorial $P_{2,}$ está dada por el conjunto de vectores $\left\{1, \sqrt{3}(2x-1), \sqrt{5}(6x^2 - 6x + 1).\right\}$

$$\frac{<|>}{<|>}$$

Problema IV.1: De las siguientes transformaciones, verifique cuales son lineales y cuales no los son.

a) $T : R^3 \to R^2$ definida por $T(x, y, z) = (x^2 + y, y - z)$
b) $T : R^3 \to R^3$ definida por $T(x, y, z) = (x^2, y - z, z^2)$
c) $T : R^3 \to R^4$ definida por $T(x, y, z) = (x - y, 2y, -2z, z - x)$
d) $T : R^4 \to R^2$ definida por $T(x, y, z, w) = (xy, zw)$
e) $T : P_1 \to P_2$ definida por $T(ax + b) = ax^2 + (a - b)x$
f) $T : P_1 \to P_2$ definida por $T(p(x)) = x \cdot p(x) + p(0)$, donde $p(x) = ax + b$
g) $T : P_2 \to P_1$ definida por $T(ax^2 + bx + c) = 2ax - b$
h) $T : P_2 \to P_1$ definida por $T(ax^2 + bx + c) = (a + 2)x + (b - a)$
i) $T : P_2 \to P_2$ definida por $T(ax^2 + bx + c) = (a + 1)x^2 + (b - c)x + (a + c)$
j) $T : P_2 \to P_2$ definida por $T(ax^2 + bx + c) = ax^2 + (b - c)x + (a - b)$

Solución:

a) Sean $u_1, u_2 \in R^3$, donde $u_1 = (x_1, y_1, z_1)$ y $u_2 = (x_2, y_2, z_2)$, y sea el escalar $\alpha \in R$, entonces

$$\begin{aligned} T(u_1 + u_2) &= T\left((x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)\right) = T(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \\ &= \big((x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2), (y_1 + y_2) - (z_1 + z_2)\big) \\ &= (x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 + y_1 + y_2, y_1 + y_2 - z_1 - z_2) \end{aligned}$$

mientras que

$$\begin{aligned} T(u_1) + T(u_2) &= T(x_1, y_1, z_1) + T(x_2, y_2, z_2) = \big(x_1^2 + y_1, y_1 - z_1\big) + \big(x_2^2 + y_2, y_2 - z_2\big) \\ &= \big(x_1^2 + x_2^2 + y_1 + y_2, y_1 + y_2 - z_1 - z_2\big) \end{aligned}$$

donde tenemos que

$$T(u_1 + u_2) \neq T(u_1) + T(u_2)$$

por lo tanto la transformación no es lineal.

b) Sean $u_1, u_2 \in R^3$, donde $u_1 = (x_1, y_1, z_1)$ y $u_2 = (x_2, y_2, z_2)$, y sea el escalar $\alpha \in R$, entonces

$$\begin{aligned} T(u_1 + u_2) &= T\left((x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)\right) = T(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \\ &= \big((x_1 + x_2)^2, (y_1 + y_2) - (z_1 + z_2), (z_1 + z_2)^2\big) \\ &= (x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2, y_1 + y_2 - z_1 - z_2, z_1^2 + z_2^2 + 2z_1z_2) \end{aligned}$$

mientras que

$$\begin{aligned} T(u_1) + T(u_2) &= T(x_1, y_1, z_1) + T(x_2, y_2, z_2) = \big(x_1^2, y_1 - z_1, z_1^2\big) + \big(x_2^2, y_2 - z_2, z_2^2\big) \\ &= \big(x_1^2 + x_2^2, y_1 + y_2 - z_1 - z_2, z_1^2 + z_2^2\big) \end{aligned}$$

donde tenemos que

$$T(u_1 + u_2) \neq T(u_1) + T(u_2)$$

por lo tanto la transformación no es lineal.

$$\frac{<|>}{<|>}$$

c) Sean $u_1, u_2 \in R^3$, donde $u_1 = (x_1, y_1, z_1)$ y $u_2 = (x_2, y_2, z_2)$, y sea el escalar $\alpha \in R$, entonces

$$\begin{aligned} T(u_1 + u_2) &= T\left((x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)\right) = T(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \\ &= ((x_1 + x_2) - (y_1 + y_2), 2(y_1 + y_2), -2(z_1 + z_2), (z_1 + z_2) - (x_1 + x_2)) \\ &= (x_1 + x_2 - y_1 - y_2, 2y_1 + 2y_2, -2z_1 - 2z_2, z_1 + z_2 - x_1 - x_2) \end{aligned}$$

mientras que

$$\begin{aligned} T(u_1) + T(u_2) &= T(x_1, y_1, z_1) + T(x_2, y_2, z_2) \\ &= (x_1 - y_1, 2y_1, -2z_1, z_1 - x_1) + (x_2 - y_2, 2y_2, -2z_2, z_2 - x_2) \\ &= (x_1 + x_2 - y_1 - y_2, 2y_1 + 2y_2, -2z_1 - 2z_2, z_1 + z_2 - x_1 - x_2) \end{aligned}$$

donde tenemos que

$$T(u_1 + u_2) = T(u_1) + T(u_2)$$

Ahora

$$\begin{aligned} T(\alpha u_1) &= T\left(\alpha(x_1, y_1, z_1)\right) = T(\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1) = (\alpha x_1 - \alpha y_1, 2\alpha y_1, -2\alpha z_1, \alpha z_1 - \alpha x_1) \\ &= (\alpha(x_1 - y_1), 2\alpha y_1, -2\alpha z_1, \alpha(z_1 - x_1)) \end{aligned}$$

y

$$\alpha T(u_1) = \alpha T(x_1, y_1, z_1) = \alpha(x_1 - y_1, 2y_1, -2z_1, z_1 - x_1) = (\alpha(x_1 - y_1), 2\alpha y_1, -2\alpha z_1, \alpha(z_1 - x_1))$$

observamos que

$$T(\alpha u_1) = \alpha T(u_1)$$

por lo tanto la transformación es lineal.

d) Sean $u_1, u_2 \in R^4$, donde $u_1 = (x_1, y_1, z_1, w_1)$ y $u_2 = (x_2, y_2, z_2, w_2)$, y sea el escalar $\alpha \in R$, entonces

$$\begin{aligned} T(u_1 + u_2) &= T\left((x_1, y_1, z_1, w_1) + (x_2, y_2, z_2, w_2)\right) = T(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2, w_1 + w_2) \\ &= ((x_1 + x_2)(y_1 + y_2), (z_1 + z_2)(w_1 + w_2)) \\ &= (x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_1 y_2 + x_2 y_1, z_1 w_1 + z_2 w_2 + z_1 w_2 + z_2 w_1) \end{aligned}$$

mientras que

$$\begin{aligned} T(u_1) + T(u_2) &= T(x_1, y_1, z_1, w_1) + T(x_2, y_2, z_2, w_2) = (x_1 y_1, z_1 w_1) + (x_2 y_2, z_2 w_2) \\ &= (x_1 y_1 + x_2 y_2, z_1 w_1 + z_2 w_2) \end{aligned}$$

donde tenemos que

$$T(u_1 + u_2) \neq T(u_1) + T(u_2)$$

por lo tanto la transformación no es lineal.

$$\frac{<|>}{<|>}$$

e) Sean $u_1, u_2 \in P_1$, donde $u_1 = a_1x + b_1$ y $u_2 = a_2x + b_2$, y sea el escalar $\alpha \in R$, entonces

$$\begin{aligned} T(u_1 + u_2) &= T\left((a_1x + b_1) + (a_2x + b_2)\right) = T\left((a_1 + a_2)x + (b_1 + b_2)\right) \\ &= (a_1 + a_2)x^2 + \left((a_1 + a_2) - (b_1 + b_2)\right)x \\ &= (a_1 + a_2)x^2 + (a_1 + a_2)x - (b_1 + b_2)x \end{aligned}$$

mientras que

$$\begin{aligned} T(u_1) + T(u_2) &= T(a_1x + b_1) + T(a_2x + b_2) \\ &= \left(a_1x^2 + (a_1 - b_1)x\right) + \left(a_2x^2 + (a_2 - b_2)x\right) \\ &= (a_1 + a_2)x^2 + (a_1 + a_2)x - (b_1 + b_2)x \end{aligned}$$

donde tenemos que

$$T(u_1 + u_2) = T(u_1) + T(u_2)$$

Ahora

$$T(\alpha u_1) = T\left(\alpha(a_1x + b_1)\right) = T(\alpha a_1x + \alpha b_1) = \alpha a_1x^2 + (\alpha a_1 - \alpha b_1)x = \alpha a_1x^2 + \alpha(a_1 - b_1)x$$

y

$$\alpha T(u_1) = \alpha T(a_1x + b_1) = \alpha\left(a_1x^2 + (a_1 - b_1)x\right) = \alpha a_1x^2 + \alpha(a_1 - b_1)x$$

observamos que

$$T(\alpha u_1) = \alpha T(u_1)$$

por lo tanto la transformación es lineal.

f) Sean $p_1(x), p_2(x) \in P_1$, donde $p_1(x) = a_1x + b_1$ y $p_2(x) = a_2x + b_2$, y sea el escalar $\alpha \in R$, entonces

$$\begin{aligned} T\left(p_1(x) + p_2(x)\right) &= T\left((a_1x + b_1) + (a_2x + b_2)\right) = T\left((a_1 + a_2)x + (b_1 + b_2)\right) \\ &= x\left((a_1 + a_2)x + (b_1 + b_2)\right) + (b_1 + b_2) \\ &= (a_1 + a_2)x^2 + (b_1 + b_2)x + (b_1 + b_2) \end{aligned}$$

mientras que

$$\begin{aligned} T(u_1) + T(u_2) &= T(a_1x + b_1) + T(a_2x + b_2) \\ &= (x(a_1x + b_1) + b_1) + (x(a_2x + b_2) + b_2) \\ &= (a_1x^2 + b_1x + b_1) + (a_2x^2 + b_2x + b_2) \\ &= (a_1 + a_2)x^2 + (b_1 + b_2)x + (b_1 + b_2) \end{aligned}$$

donde tenemos que

$$T(u_1 + u_2) = T(u_1) + T(u_2)$$

Ahora

$$T(\alpha u_1) = T\left(\alpha(a_1x + b_1)\right) = T(\alpha a_1x + \alpha b_1) = x(\alpha a_1x + \alpha b_1) + \alpha b_1 = \alpha a_1x^2 + \alpha b_1x + \alpha b_1$$

y

$$\alpha T(u_1) = \alpha T(a_1x + b_1) = \alpha\left(x(a_1x + b_1) + b_1\right) = \alpha a_1x^2 + \alpha b_1x + \alpha b_1$$

observamos que

$$T(\alpha u_1) = \alpha T(u_1)$$

por lo tanto la transformación es lineal.

$$\frac{<|>}{<|>}$$

g) Sean $u_1, u_2 \in P_2$, donde $u_1 = a_1x^2 + b_1x + c_1$ y $u_2 = a_2x^2 + b_2x + c_2$, y sea el escalar $\alpha \in R$, entonces

$$\begin{aligned} T(u_1 + u_2) &= T\left(\left(a_1x^2 + b_1x + c_1\right) + (a_2x^2 + b_2x + c_2)\right) \\ &= T\left((a_1 + a_2)x^2 + (b_1 + b_2)x + (c_1 + c_2)\right) \\ &= 2(a_1 + a_2)x - (b_1 + b_2) \end{aligned}$$

mientras que

$$\begin{aligned} T(u_1) + T(u_2) &= T(a_1x^2 + b_1x + c_1) + T(a_2x^2 + b_2x + c_2) \\ &= (2a_1x - b_1) + (2a_2x - b_2) \\ &= 2(a_1 + a_2)x - (b_1 + b_2) \end{aligned}$$

donde tenemos que

$$T(u_1 + u_2) = T(u_1) + T(u_2)$$

Ahora

$$T(\alpha u_1) = T\left(\alpha(a_1x^2 + b_1x + c_1)\right) = T(\alpha a_1x^2 + \alpha b_1x + \alpha c_1) = 2\alpha a_1x - \alpha b_1$$

y

$$\alpha T(u_1) = \alpha T(a_1x^2 + b_1x + c_1) = \alpha\,(2a_1x - b_1) = 2\alpha a_1x - \alpha b_1$$

observamos que

$$T(\alpha u_1) = \alpha T(u_1)$$

por lo tanto la transformación es lineal.

h) Sean $u_1, u_2 \in P_2$, donde $u_1 = a_1x^2 + b_1x + c_1$ y $u_2 = a_2x^2 + b_2x + c_2$, y sea el escalar $\alpha \in R$, entonces

$$\begin{aligned} T(u_1 + u_2) &= T\left(\left(a_1x^2 + b_1x + c_1\right) + (a_2x^2 + b_2x + c_2)\right) \\ &= T\left((a_1 + a_2)x^2 + (b_1 + b_2)x + (c_1 + c_2)\right) \\ &= \left((a_1 + a_2) + 2\right)x + \left((b_1 + b_2) - (a_1 + a_2)\right) \\ &= (a_1 + a_2)x + 2x + (b_1 + b_2) - (a_1 + a_2) \end{aligned}$$

mientras que

$$\begin{aligned} T(u_1) + T(u_2) &= T(a_1x^2 + b_1x + c_1) + T(a_2x^2 + b_2x + c_2) \\ &= \left((a_1 + 2)x + (b_1 - a_1)\right) + \left((a_2 + 2)x + (b_2 - a_2)\right) \\ &= (a_1 + a_2)x + 4x + (b_1 + b_2) - (a_1 + a_2) \end{aligned}$$

donde tenemos que

$$T(u_1 + u_2) \neq T(u_1) + T(u_2)$$

por lo tanto la transformación no es lineal.

$$\frac{<|>}{<|>}$$

i) Sean $u_1, u_2 \in P_2$, donde $u_1 = a_1x^2 + b_1x + c_1$ y $u_2 = a_2x^2 + b_2x + c_2$, y sea el escalar $\alpha \in R$, entonces

$$\begin{aligned} T(u_1 + u_2) &= T\left(\left(a_1x^2 + b_1x + c_1\right) + (a_2x^2 + b_2x + c_2)\right) \\ &= T\left((a_1 + a_2)x^2 + (b_1 + b_2)x + (c_1 + c_2)\right) \\ &= \left((a_1 + a_2) + 1\right)x^2 + \left((b_1 + b_2) - (c_1 + c_2)\right)x + \left((a_1 + a_2) + (c_1 + c_2)\right) \end{aligned}$$

mientras que

$$\begin{aligned} T(u_1) + T(u_2) &= T(a_1x^2 + b_1x + c_1) + T(a_2x^2 + b_2x + c_2) \\ &= \left((a_1 + 1)x^2 + (b_1 - c_1)x + (a_1 + c_1)\right) + \left((a_2 + 1)x^2 + (b_2 - c_2)x + (a_2 + c_2)\right) \\ &= \left((a_1 + a_2) + 2\right)x^2 + \left((b_1 + b_2) - (c_1 + c_2)\right)x + \left((a_1 + a_2) + (c_1 + c_2)\right) \end{aligned}$$

donde tenemos que

$$T(u_1 + u_2) \neq T(u_1) + T(u_2)$$

por lo tanto la transformación no es lineal.

j) Sean $u_1, u_2 \in P_2$, donde $u_1 = a_1x^2 + b_1x + c_1$ y $u_2 = a_2x^2 + b_2x + c_2$, y sea el escalar $\alpha \in R$, entonces

$$\begin{aligned} T(u_1 + u_2) &= T\left(\left(a_1x^2 + b_1x + c_1\right) + (a_2x^2 + b_2x + c_2)\right) \\ &= T\left((a_1 + a_2)x^2 + (b_1 + b_2)x + (c_1 + c_2)\right) \\ &= (a_1 + a_2)x^2 + \left((b_1 + b_2) - (c_1 + c_2)\right)x + \left((a_1 + a_2) - (b_1 + b_2)\right) \end{aligned}$$

mientras que

$$\begin{aligned} T(u_1) + T(u_2) &= T(a_1x^2 + b_1x + c_1) + T(a_2x^2 + b_2x + c_2) \\ &= \left(a_1x^2 + (b_1 - c_1)x + (a_1 - b_1)\right) + \left(a_2x^2 + (b_2 - c_2)x + (a_2 - b_2)\right) \\ &= (a_1 + a_2)x^2 + \left((b_1 + b_2) - (c_1 + c_2)\right)x + \left((a_1 + a_2) + (c_1 + c_2)\right) \end{aligned}$$

donde tenemos que

$$T(u_1 + u_2) = T(u_1) + T(u_2)$$

Ahora

$$\begin{aligned} T(\alpha u_1) &= T\left(\alpha(a_1x^2 + b_1x + c_1)\right) = T(\alpha a_1x^2 + \alpha b_1x + \alpha c_1) \\ &= \alpha a_1x^2 + (\alpha b_1 - \alpha c_1)x + (\alpha a_1 - \alpha b_1) \\ &= \alpha a_1x^2 + \alpha(b_1 - c_1)x + \alpha(a_1 - b_1) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \alpha T(u_1) &= \alpha T(a_1x^2 + b_1x + c_1) \\ &= \alpha\left(a_1x^2 + (b_1 - c_1)x + (a_1 - b_1)\right) \\ &= \alpha a_1x^2 + \alpha(b_1 - c_1)x + \alpha(a_1 - b_1) \end{aligned}$$

observamos que

$$T(\alpha u_1) = \alpha T(u_1)$$

por lo tanto la transformación es lineal.

$$\frac{<|>}{<|>}$$

Problema IV.2: Para las siguientes transformaciones, verifique cuales son lineales y cuales no los son.

a) $T : M_{22} \to M_{22}$ definida por $T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & c-d \\ c+d & 2a \end{pmatrix}$

b) $T : M_{22} \to M_{22}$ definida por $T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-1 & b+1 \\ 2c & 3d \end{pmatrix}$

c) $T : M_{22} \to R$ definida por $T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a + d$

d) $T : M_{22} \to R$ definida por $T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a + b - c - d + 1$

Solución:

a) Sean $u_1, u_2 \in M_{22}$, donde $u_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$ y $u_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$, y consideremos el escalar $\alpha \in R$, entonces

$$\begin{aligned} T(u_1 + u_2) &= T\left(\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}\right) = T\begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & d_1 + d_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} b_1 + b_2 & (c_1 + c_2) - (d_1 + d_2) \\ (c_1 + c_2) - (d_1 + d_2) & 2(a_1 + a_2) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

mientras que

$$\begin{aligned} T(u_1) + T(u_2) &= T\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} + T\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} b_1 & c_1 - d_1 \\ c_1 - d_1 & 2a_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_2 & c_2 - d_2 \\ c_2 - d_2 & 2a_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} b_1 + b_2 & (c_1 + c_2) - (d_1 + d_2) \\ (c_1 + c_2) - (d_1 + d_2) & 2(a_1 + a_2) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donde tenemos que

$$T(u_1 + u_2) = T(u_1) + T(u_2)$$

Ahora

$$T(\alpha u_1) = T\left(\alpha\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}\right) = T\begin{pmatrix} \alpha a_1 & \alpha b_1 \\ \alpha c_1 & \alpha d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha b_1 & \alpha(c_1 - d_1) \\ \alpha(c_1 - d_1) & 2\alpha a_1 \end{pmatrix}$$

y

$$\alpha T(u_1) = \alpha T\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} b_1 & c_1 - d_1 \\ c_1 - d_1 & 2a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha b_1 & \alpha(c_1 - d_1) \\ \alpha(c_1 - d_1) & 2\alpha a_1 \end{pmatrix}$$

observamos que

$$T(\alpha u_1) = \alpha T(u_1)$$

por lo tanto la transformación es lineal.

$$\frac{<|>}{<|>}$$

b) Sean $u_1, u_2 \in M_{22}$, donde $u_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$ y $u_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$, y consideremos el escalar $\alpha \in R$, entonces

$$\begin{aligned} T(u_1 + u_2) &= T\left(\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}\right) = T\begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & d_1 + d_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (a_1 + a_2) - 1 & (b_1 + b_2) + 1 \\ 2(c_1 + c_2) & 3(d_1 + d_2) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

mientras que

$$\begin{aligned} T(u_1) + T(u_2) &= T\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} + T\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - 1 & b_1 + 1 \\ 2c_1 & 3d_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 - 1 & b_2 + 1 \\ 2c_2 & 3d_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (a_1 + a_2) - 2 & (b_1 + b_2) + 2 \\ 2(c_1 + c_2) & 3(d_1 + d_2) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donde tenemos que

$$T(u_1 + u_2) \neq T(u_1) + T(u_2)$$

por lo tanto la transformación no es lineal.

c) Sean $u_1, u_2 \in M_{22}$, donde $u_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$ y $u_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$, y consideremos el escalar $\alpha \in R$, entonces

$$\begin{aligned} T(u_1 + u_2) &= T\left(\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}\right) = T\begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & d_1 + d_2 \end{pmatrix} \\ &= (a_1 + a_2) + (d_1 + d_2) \end{aligned}$$

mientras que

$$\begin{aligned} T(u_1) + T(u_2) &= T\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} + T\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \\ &= (a_1 + d_1) + (a_2 + d_2) = (a_1 + a_2) + (d_1 + d_2) \end{aligned}$$

donde tenemos que

$$T(u_1 + u_2) = T(u_1) + T(u_2)$$

Ahora

$$T(\alpha u_1) = T\left(\alpha\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}\right) = T\begin{pmatrix} \alpha a_1 & \alpha b_1 \\ \alpha c_1 & \alpha d_1 \end{pmatrix} = (\alpha a_1 + \alpha d_1) = \alpha(a_1 + d_1)$$

y

$$\alpha T(u_1) = \alpha T\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} = \alpha(a_1 + d_1)$$

observamos que

$$T(\alpha u_1) = \alpha T(u_1)$$

por lo tanto la transformación es lineal.

$$\frac{<|>}{<|>}$$

d) Sean $u_1, u_2 \in M_{22}$, donde $u_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$ y $u_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$, y consideremos el escalar $\alpha \in R$, entonces

$$\begin{aligned} T(u_1 + u_2) &= T\left(\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}\right) \\ &= T\begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & d_1 + d_2 \end{pmatrix} \\ &= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) - (c_1 + c_2) - (d_1 + d_2) + 1 \end{aligned}$$

mientras que

$$\begin{aligned} T(u_1) + T(u_2) &= T\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} + T\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \\ &= (a_1 + b_1 - c_1 - d_1 + 1) + (a_2 + b_2 - c_2 - d_2 + 1) \\ &= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) - (c_1 + c_2) - (d_1 + d_2) + 2 \end{aligned}$$

donde tenemos que

$$T(u_1 + u_2) \neq T(u_1) + T(u_2)$$

por lo tanto la transformación no es lineal.

$$\frac{<|>}{<|>}$$

Problema IV.3: Considere la transformación $T : M_{nn} \to R$, definida como $T(A) = a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}$, esto es, el producto de la diagonal. Diga si la transformación es lineal o no lo es.

Solución: Sean $A, B \in M_{nn}$, esto es A y B son matrices de tamaño $n \times n$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2n} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \cdots & b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$, entonces tenemos;

$$\begin{aligned} T(A+B) &= T\left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2n} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \cdots & b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}\right) \\ &= T\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33}+b_{33} & \cdots & a_{3n}+b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}+b_{n1} & a_{n2}+b_{n2} & a_{n3}+b_{n3} & \cdots & a_{nn}+b_{nn} \end{pmatrix} \\ &= (a_{11}+b_{11})(a_{22}+b_{22})(a_{33}+b_{33})\cdots(a_{nn}+b_{nn}) \end{aligned}$$

mientras que

$$\begin{aligned} T(A)+T(A) &= T\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} + T\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2n} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \cdots & b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} \\ &= (a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}) + (b_{11}b_{22}b_{33}\cdots b_{nn}) \end{aligned}$$

vemos que

$$T(A+B) \neq T(A)+T(B)$$

por lo tanto la transformación no es lineal.

$$\frac{<|>}{<|>}$$

Problema IV.4 Considere la transformación $T : M_{nn} \to R$, definida como $T(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33} + \cdots + a_{nn}$, esto es, la suma de la diagonal. Diga si la transformación es lineal o no lo es. A esta transformación se le conoce como traza de la matriz A.

Solución: Sean $A, B \in M_{nn}$, esto es A y B son matrices de tamaño $n \times n$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2n} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \cdots & b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$, entonces tenemos;

$$\begin{aligned}
T(A+B) &= T\left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2n} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \cdots & b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}\right) \\
&= T\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33}+b_{33} & \cdots & a_{3n}+b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}+b_{n1} & a_{n2}+b_{n2} & a_{n3}+b_{n3} & \cdots & a_{nn}+b_{nn} \end{pmatrix} \\
&= (a_{11}+b_{11}) + (a_{22}+b_{22}) + (a_{33}+b_{33}) + \cdots + (a_{nn}+b_{nn})
\end{aligned}$$

mientras que

$$\begin{aligned}
T(A)+T(A) &= T\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} + T\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2n} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \cdots & b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} \\
&= (a_{11}+a_{22}+a_{33}+\cdots+a_{nn}) + (b_{11}+b_{22}+b_{33}+\cdots+b_{nn}) \\
&= (a_{11}+b_{11}) + (a_{22}+b_{22}) + (a_{33}+b_{33}) + \cdots + (a_{nn}+b_{nn})
\end{aligned}$$

vemos que

$$T(A+B) = T(A) + T(B)$$

$$\frac{<|>}{<|>}$$

Ahora

$$\begin{aligned} T(\alpha A) &= T\left(\alpha\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\right) = T\begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \alpha a_{13} & \cdots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \alpha a_{23} & \cdots & \alpha a_{2n} \\ \alpha a_{31} & \alpha a_{32} & \alpha a_{33} & \cdots & \alpha a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{n1} & \alpha a_{n2} & \alpha a_{n3} & \cdots & \alpha a_{nn} \end{pmatrix} \\ &= \alpha a_{11} + \alpha a_{22} + \alpha a_{33} + \cdots + \alpha a_{nn} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \alpha T(A) &= \alpha T\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \alpha\left(a_{11} + a_{22} + a_{33} + \cdots + a_{nn}\right) \\ &= \alpha a_{11} + \alpha a_{22} + \alpha a_{33} + \cdots + \alpha a_{nn} \end{aligned}$$

observamos que

$$T(\alpha A) = \alpha T(A)$$

por lo tanto la transformación es lineal.

$$\frac{< \mid >}{< \mid >}$$

Problema IV.5 Sea $T : R^2 \to R^2$ una transformación lineal tal que: $T(1,1) = (1,-2)$ y $T(-1,1) = (2,3)$, con este resultado determinar;

a) $T(-1,5)$
b) $T(x,y)$

Solución: Primero observamos que el conjunto de vectores $\{(1,1),(-1,1)\}$, es una base de R^2, esto es, son linealmente independientes y generan a todo vector de R^2.

a) Tenemos que:

$$(-1,5) = a_1(1,1) + a_2(-1,1) = (a_1 - a_2, a_1 + a_2) \Rightarrow \begin{array}{l} a_1 - a_2 = -1 \\ a_1 + a_2 = 5 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} a_1 = 2 \\ a_2 = 3 \end{array}$$

así escribimos el vector

$$(-1,5) = 2 \cdot (1,1) + 3 \cdot (-1,1)$$

Al transformarlo obtenemos

$$\begin{aligned} T(-1,5) &= T\left(2 \cdot (1,1) + 3 \cdot (-1,1)\right) = T\left(2 \cdot (1,1)\right) + T\left(3 \cdot (-1,1)\right) = 2 \cdot T(1,1) + 3 \cdot T(-1,1) \\ &= 2 \cdot (1,-2) + 3 \cdot (2,3) = (2,-4) + (6,9) \\ &= (8,5) \end{aligned}$$

en las igualdades anteriores se aplico el hecho de que la transformación es lineal.

b) Tenemos que:

$$(x,y) = a_1(1,1) + a_2(-1,1) = (a_1 - a_2, a_1 + a_2) \Rightarrow \begin{array}{l} a_1 - a_2 = x \\ a_1 + a_2 = y \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} a_1 = (x+y)/2 \\ a_2 = (y-x)/2 \end{array}$$

así escribimos el vector

$$(x,y) = \left(\frac{x+y}{2}\right)(1,1) + \left(\frac{y-x}{2}\right)(-1,1)$$

Al transformarlo obtenemos

$$\begin{aligned} T(x,y) &= T\left(\left(\frac{x+y}{2}\right)(1,1) + \left(\frac{y-x}{2}\right)(-1,1)\right) = T\left(\left(\frac{x+y}{2}\right)(1,1)\right) + T\left(\left(\frac{y-x}{2}\right)(-1,1)\right) \\ &= \left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot T(1,1) + \left(\frac{y-x}{2}\right) \cdot T(-1,1) = \left(\frac{x+y}{2}\right)(1,-2) + \left(\frac{y-x}{2}\right)(2,3) \\ &= \left(\frac{x}{2} + \frac{y}{2}, -x-y\right) + \left(y-x, 3\frac{y}{2} - 3\frac{x}{2}\right) = \left(-\frac{x}{2} + \frac{3y}{2}, -\frac{5x}{2} + \frac{y}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(-x+3y, -5x+y\right) \end{aligned}$$

en las igualdades anteriores se aplico el hecho de que la transformación es lineal.

$$\frac{< | >}{< | >}$$

Problema IV.6 Sea $T : P_2 \to P_3$ una transformación lineal para la cual sabemos que: $T(1) = 1$, $T(x) = x^2$ y $T(x^2 - x) = x^3 + x$, con esto determinar;

a) $T(2x^2 - 5x + 3)$
b) $T(ax^2 + bx + c)$

Solución: Observamos que el conjunto de vectores $\{1, x, x^2 - x\}$, es una base de P_2, esto es, son linealmente independientes y generan a todo vector de P_2.

a) Tenemos que:

$$\begin{aligned} 2x^2 - 5x + 3 &= \alpha_1 \cdot \left(x^2 - x\right) + \alpha_2 \cdot x + \alpha_3 \cdot 1 = \alpha_1 \cdot x^2 + (\alpha_2 - \alpha_1) \cdot x + \alpha_3 \cdot 1 \\ &\Rightarrow \begin{array}{c} \alpha_1 = 2 \\ \alpha_2 - \alpha_1 = -5 \\ \alpha_3 = 3 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} \alpha_1 = 2 \\ \alpha_2 = -3 \\ \alpha_3 = 3 \end{array} \end{aligned}$$

así escribimos el vector

$$2x^2 - 5x + 3 = 2 \cdot \left(x^2 - x\right) - 3 \cdot x + 3 \cdot 1$$

Al transformarlo obtenemos

$$\begin{aligned} T(2x^2 - 5x + 3) &= T\left(2 \cdot \left(x^2 - x\right) - 3 \cdot x + 3 \cdot 1\right) = T\left(2 \cdot \left(x^2 - x\right)\right) - T\left(3 \cdot x\right) + T\left(3 \cdot 1\right) \\ &= 2 \cdot T\left(x^2 - x\right) - 3 \cdot T(x) + 3 \cdot T(1) = 2 \cdot \left(x^3 + x\right) - 3 \cdot x^2 + 3 \cdot 1 \\ &= 2x^2 - 3x^2 + 3x + 3 \end{aligned}$$

en las igualdades anteriores se aplico el hecho de que la transformación es lineal.

b) Tenemos que:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= \alpha_1 \cdot \left(x^2 - x\right) + \alpha_2 \cdot x + \alpha_3 \cdot 1 = \alpha_1 \cdot x^2 + (\alpha_2 - \alpha_1) \cdot x + \alpha_3 \cdot 1 \\ &\Rightarrow \begin{array}{c} \alpha_1 = a \\ \alpha_2 - \alpha_1 = b \\ \alpha_3 = c \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} \alpha_1 = a \\ \alpha_2 = a + b \\ \alpha_3 = c \end{array} \end{aligned}$$

así escribimos el vector

$$ax^2 + bx + c = a \cdot \left(x^2 - x\right) + (a + b) \cdot x + c \cdot 1$$

Al transformarlo obtenemos

$$\begin{aligned} T(ax^2 + bx + c) &= T\left(a \cdot \left(x^2 - x\right) + (a + b) \cdot x + c \cdot 1\right) = T\left(a \cdot \left(x^2 - x\right)\right) + T\left((a + b) \cdot x\right) + T\left(c \cdot 1\right) \\ &= a \cdot T\left(x^2 - x\right) + (a + b) \cdot T(x) + c \cdot T(1) = a \cdot \left(x^3 + x\right) + (a + b) \cdot x^2 + c \cdot 1 \\ &= ax^2 + (a + b)x^2 + ax + c \end{aligned}$$

en las igualdades anteriores se aplico el hecho de que la transformación es lineal.

$$\frac{<\mid>}{<\mid>}$$

Problema IV.7 Dada la siguiente transformación lineal $T : M_{22} \rightarrow P_3$ definida como;

$$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a + b + c + (b + c + d)x + (a - d)x^2 + (a + 2b + 2c + d)x^3$$

determine,
a) El núcleo o kernel de la transformación, diga si la transformacion es uno a uno.
b) La imagen de la transformación, diga si la transformación es sobre.

Solución:
a) Un vector $u \in ker(T) \subseteq M_{22}$ si $T(u) = 0$, entonces

$$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a + b + c + (b + c + d)x + (a - d)x^2 + (a + 2b + 2c + d)x^3 = 0$$

esto genera el siguiente sistema de ecuaciones lineales homogéneo

$$\begin{aligned} a + b + c &= 0 \\ b + c + d &= 0 \\ a - d &= 0 \\ a + 2b + 2c + d &= 0 \end{aligned}$$

cuya matriz aumentada es

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} (R_3 \rightarrow R_3 - R_1) \\ (R_4 \rightarrow R_4 - R_1) \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} (R_3 \rightarrow R_3 + R_2) \\ (R_4 \rightarrow R_4 - R_2) \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) R_1 \rightarrow R_1 - R_2 \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

entonces

$$\begin{array}{l} R_1 \Rightarrow a - d = 0 \\ R_2 \Rightarrow b + c + d = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} a = d \\ d = -b - c \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} b = \alpha \in R \\ c = \beta \in R \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} a = -\alpha - \beta \\ b = \alpha \\ c = \beta \\ d = -\alpha - \beta \end{array}$$

Así, el kernel o núcleo de la transformación contiene a todas las matrices que tienen la forma anterior, es decir,

$$ker(T) = \left\{ \begin{pmatrix} -\alpha - \beta & \alpha \\ \beta & -\alpha - \beta \end{pmatrix} \middle| \alpha,\ \beta \in R \right\}$$

una base para el kernel se determina de la siguiente manera

$$\begin{pmatrix} -\alpha - \beta & \alpha \\ \beta & -\alpha - \beta \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

entonces una base para el kernel es: $\left\{ \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\}$, así tenemos que $Dim\,(ker(T)) = 2$.

Una transformación lineal es uno a uno si $Dim\,(ker(T)) = 0$. Por lo tanto, la transformación lineal aquí considerada no es uno a uno.

$$\frac{< | >}{< | >}$$

b) Un vector $v \in im(T) \subseteq P_3$ si existe un vector $u \in M_{22}$ tal que $T(u) = v$, entonces

$$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a + b + c + (b + c + d)x + (a - d)x^2 + (a + 2b + 2c + d)x^3 \in im(T)$$

entonces tenemos que encontrar un base para los vectores que estan en la imagen, esto es,

$$\begin{aligned} & a + b + c + (b + c + d)x + (a - d)x^2 + (a + 2b + 2c + d)x^3 \\ = \; & a\left(1 + x^2 + x^3\right) + b\left(1 + x + 2x^3\right) + c\left(1 + x + 2x^3\right) + d\left(x - x^2 + x^3\right) \end{aligned}$$

esto significa que el conjunto de vectores $\left\{1 + x^2 + x^3, 1 + x + 2x^3, x - x^2 + x^3\right\}$ genera la imagen de la transformación. Ahora necesitamos solo los vectores que son linealmente independientes.

Colocamos los coeficientes de cada uno los polinomios, de mayor a menor grado, en columnas dentro de una matriz y reducimos la matriz, es decir,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_2 \to R_2 - R_1 \\ R_4 \to R_4 - R_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_3 \to R_3 + 2R_2 \\ R_4 \to R_4 - 2R_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R_1 \to R_1 + R_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} R_2 \to R_2/(-2) \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

las columnas con unos principales, corresponden a los polinomios que son linealmente independientes, en este caso los polinomios son: $\left\{1 + x^2 + x^3, 1 + x + 2x^3\right\}$. Así, esta sería una base para la imagen de la transformación, entonces $Dim\,(im(T)) = 2$.

Una transformación lineal $T : V \to W$ es sobre si $Dim\,(im(T)) = Dim\,(W)$. Para la transformación que estamos considerando tenemos que $Dim\,(im(T)) = 2 \neq Dim\,(P_3) = 4$, por lo tanto la transformación lineal no es sobre.

Además se cumple que

$$\begin{aligned} & Dim(ker(T)) + Dim(im(T)) = Dim(M_{22}) \\ & \Rightarrow 2 + 2 = 4 \end{aligned}$$

$$\frac{<|>}{<|>}$$

Problema IV.8 Considere la siguiente transformación lineal $T : R^3 \to R^3$ definida como;

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y + 2z \\ 3x + y + 4z \\ 5x - y + 8z \end{pmatrix}$$

determine,

a) El núcleo o kernel de la transformación, diga si la transformacion es uno a uno.

b) La imagen de la transformación, diga si la transformación es sobre.

Solución:

a) Un vector $u \in ker(T) \subseteq R^3$ si $T(u) = 0$, entonces

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y + 2z \\ 3x + y + 4z \\ 5x - y + 6z \end{pmatrix} = 0$$

esto genera el siguiente sistema de ecuaciones lineales homogéneo

$$\begin{aligned} x - y + 2z &= 0 \\ 3x + y + 4z &= 0 \\ 5x - y + 6z &= 0 \end{aligned}$$

cuya matriz aumentada es

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 0 \\ 5 & -1 & 6 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} (R_2 \to R_2 - 3R_1) \\ (R_3 \to R_3 - 5R_1) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 0 \end{array}\right) (R_3 \to R_3 - R_2) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$$(R_3 \to R_3/(-2)) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} (R_1 \to R_1 - 2R_3) \\ (R_2 \to R_2 + 2R_3) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$(R_2 \to R_2/4) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) (R_1 \to R_1 + R_2) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

el sistema tiene solución única, esto es,

$$\begin{aligned} x &= 0 \\ y &= 0 \\ z &= 0 \end{aligned}$$

estas son las condiciones que se deben cumplir para que el vector se transforme en cero, esto es,

$$T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

en otras palabras, el único vector que se transforma en cero es el vector cero, así,

$$ker(T) = \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right\}$$

esto implica que $Dim\,(ker(T)) = 0$.

Una transformación lineal es uno a uno si $Dim\,(ker(T)) = 0$. Por lo tanto, esta la transformación lineal si es uno a uno.

$$\frac{<|>}{<|>}$$

b) Un vector $v \in im(T) \subseteq R^3$ si existe un vector $u \in R^3$ tal que $T(u) = v$, entonces

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y + 2z \\ 3x + y + 4z \\ 5x - y + 6z \end{pmatrix} \in im(T)$$

entonces tenemos que encontrar un base para los vectores que estan en la imagen, esto es,

$$\begin{pmatrix} x - y + 2z \\ 3x + y + 4z \\ 5x - y + 6z \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

esto significa que el conjunto de vectores $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}$ genera la imagen de la transformación. Ahora necesitamos solo los vectores que son linealmente independientes.

Colocamos los vectores como columnas de una matriz y encontramos el determinante de la matriz, es decir,

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 5 & -1 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 5 & -1 & 6 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 10 + 12 - 30 = -8 \neq 0$$

como el determinante es distinto de cero, entonces significa que los vectores son linealmente independientes. Así, una base para la imagen de la transformación es $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}$, esto quiere decir que $Dim\left(im(T)\right) = 3$.

Una transformación lineal $T : V \to W$ es sobre si $Dim\left(im(T)\right) = Dim\left(W\right)$. Para la transformación que estamos considerando tenemos que $Dim\left(im(T)\right) = 3 = Dim\left(R^3\right) = 3$, por lo tanto la transformación lineal si es sobre

$$\frac{<|>}{<|>}$$

Problema IV.9 Considere la siguiente transformación lineal $T : R^2 \rightarrow R$ tal que;

$$T\begin{pmatrix} x+y \\ y+z \\ x+z \end{pmatrix} = 6x - y + z$$

en base a esto, determine al valor de $T\left(x,y,0\right) = T\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$.

Solución: La matriz asociada a esta transformación lineal es de tamaño (1×3), esto es $A_T = (a_1, a_2, a_3)$ tal que;

$$T\begin{pmatrix} x+y \\ y+z \\ x+z \end{pmatrix} = A_T\begin{pmatrix} x+y \\ y+z \\ x+z \end{pmatrix} = (a_1, a_2, a_3)\cdot\begin{pmatrix} x+y \\ y+z \\ x+z \end{pmatrix} = 6x - y + z$$

esto genera la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} a_1\left(x+y\right) + a_2\left(y+z\right) + a_3\left(x+z\right) &= 6x - y + z \\ \left(a_1 + a_3\right)x + \left(a_1 + a_2\right)y + \left(a_2 + a_3\right)z &= 6x - y + z \end{aligned}$$

donde tenemos que resolver el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} a_1 + a_3 &= 6 \\ a_1 + a_2 &= -1 \\ a_2 + a_3 &= 1 \end{aligned}$$

cuya matriz aumentada es

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) R_2 \rightarrow R_2 - R_1 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & -7 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) R_3 \rightarrow R_3 - R_2 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 2 & 8 \end{array}\right)$$

$$R_3 \rightarrow R_3/2 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{c} R_1 \rightarrow R_1 - R_3 \\ R_2 \rightarrow R_2 + R_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

Así tenemos que los elementos de la matriz asociada a la transformación, respecto a la base canónica de R^3, son

$$\begin{aligned} a_1 &= 2 \\ a_2 &= -3 \\ a_3 &= 4 \end{aligned}$$

por lo tanto la matriz es de la forma

$$A_T = (a_1, a_2, a_3) = (2, -3, 4)$$

Si deseamos transformar el vector $(x, y, 0)$ de R^3, tenemos que,

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = A_T\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = (2, -3, 4)\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = 2x - 3y$$

$$\frac{<|>}{<|>}$$

Otra manera de obtener $T(x,y,0) = T\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$, es como sigue.

Renombremos a las componentes de vector que deseamos transformar, esto es, sea $T(x,y,0) = T\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix}$, ahora igualamos esta con la transformación que conocemos, esto es,

$$T\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} x+y \\ y+z \\ x+z \end{pmatrix}$$

de donde obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} x+y &= a_1 \\ y+z &= a_2 \\ x+z &= 0 \end{aligned}$$

cuya matriz aumentada es

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & 1 & a_2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) R_3 \to R_3 - R_1 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & 1 & a_2 \\ 0 & -1 & 1 & -a_1 \end{array}\right) R_3 \to R_3 + R_2 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & 1 & a_2 \\ 0 & 0 & 2 & a_2 - a_1 \end{array}\right)$$

$$R_3 \to R_3/2 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & 1 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & (a_2 - a_1)/2 \end{array}\right) R_2 \to R_2 - R_3 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & 0 & (a_2 + a_1)/2 \\ 0 & 0 & 1 & (a_2 - a_1)/2 \end{array}\right)$$

$$R_1 \to R_1 - R_2 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & (a_1 - a_2)/2 \\ 0 & 1 & 0 & (a_2 + a_1)/2 \\ 0 & 0 & 1 & (a_2 - a_1)/2 \end{array}\right)$$

de manera que tenemos la solución

$$\begin{aligned} x &= (a_1 - a_2)/2 \\ y &= (a_2 + a_1)/2 \\ z &= (a_2 - a_1)/2 \end{aligned}$$

De esta menera tenemos que

$$\begin{aligned} T\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} &= T\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix} = 6x - y + z = 6\left(\frac{(a_1 - a_2)}{2}\right) - \frac{(a_2 + a_1)}{2} + \frac{(a_2 - a_1)}{2} \\ &= 3a_1 - 3a_2 - \frac{a_2}{2} - \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2} - \frac{a_1}{2} = 2a_1 - 3a_2 \end{aligned}$$

recordando el renombramiento de las componentes tenemos que

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = 2x - 3y$$

$$\frac{<|>}{<|>}$$

Problema IV.10 Encuentre la representación matricial de la siguiente transformación lineal $T : R^2 \to R^2$, la cual esta definida como

$$T(x, y) = (4x - y, 3x + 2y)$$

con respecto a las bases $B_1 = B_2 = \{(-1, 1), (4, 3)\}$.

Determine el kernel o núcleo de la transfromación, así como la imagen.

Solución: Para encontrar la matriz asociada a la transformación, primero transformamos los vectores de la base B, esto es,

$$\begin{aligned} T(-1,1) &= (4(-1) - (1), 3(-1) + 2(1)) = (-5, -1) \\ T(4,3) &= (4(4) - (3), 3(4) + 2(3)) = (13, 18) \end{aligned}$$

ahora, estos vectores los escribimos como combinación lineal de la base B_2, es decir,

$$\begin{aligned} T(-1,1) &= (-5,-1) = a_{11}(-1,1) + a_{21}(4,3) = (-a_{11} + 4a_{21}, a_{11} + 3a_{21}) \\ T(4,3) &= (13,18) = a_{12}(-1,1) + a_{22}(4,3) = (-a_{12} + 4a_{22}, a_{12} + 3a_{22}) \end{aligned}$$

de donde obtenemos los siguientes sistemas de ecuaciones lineales

$$\begin{array}{l} -5 = -a_{11} + 4a_{21} \\ -1 = a_{11} + 3a_{21} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} a_{11} = 11/7 \\ a_{21} = -6/7 \end{array} \quad \text{y} \quad \begin{array}{l} 13 = -a_{12} + 4a_{22} \\ 18 = a_{12} + 3a_{22} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} a_{12} = 33/7 \\ a_{22} = 31/7 \end{array}$$

Por lo tanto, la matriz de la transformación es

$$M_T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11/7 & 33/7 \\ -6/7 & 31/7 \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 11 & 33 \\ -6 & 31 \end{pmatrix}$$

Otra manera de obtener esta matriz es mediante la matriz doble, de un lado colocamos a los vectores de la base B_2 como columnas y del otro lado a los vectores de la base B_1 transformados, también como columnas, después transformamos la matriz de la base B_2 en la identidad y la otra matriz es M_T, en otras palabras, tenemos

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 4 & -5 & 13 \\ 1 & 3 & -1 & 18 \end{array}\right) (R_2 + R_1 \to R_2) \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 4 & -5 & 13 \\ 0 & 7 & -6 & 31 \end{array}\right) (R_2/7 \to R_2) \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 4 & -5 & 13 \\ 0 & 1 & -6/7 & 31/7 \end{array}\right)$$

$$(R_1 - 4R_2 \to R_1) \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & -11/7 & -33/7 \\ 0 & 1 & -6/7 & 31/7 \end{array}\right) ((-1)R_1 \to R_1) \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 11/7 & 33/7 \\ 0 & 1 & -6/7 & 31/7 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow M_T = \tfrac{1}{7}\begin{pmatrix} 11 & 33 \\ -6 & 31 \end{pmatrix}$$

Esta matriz satisface la relación, $[T(u)]_{B_2} = M_T \cdot [u]_{B_1}$. Consideremos un vector arbitrario de R^2, digamos $u = (2, -4)$ y transformemoslo usando T y usando M_T. Entonces

$$\begin{aligned} & T(2,-4) = (12,-2) = \alpha_1(-1,1) + \alpha_2(4,3) = (-\alpha_1 + 4\alpha_2, \alpha_1 + 3\alpha_2) \\ & \Rightarrow \begin{array}{l} 12 = -\alpha_1 + 4\alpha_2 \\ -2 = \alpha_1 + 3\alpha_2 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \alpha_1 = 44/7 \\ \alpha_2 = 10/7 \end{array} \\ & \Rightarrow [T(u)]_{B_2} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{7}\begin{pmatrix} 44 \\ 10 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ahora, usando la matriz tenemos,

$$\begin{aligned} & u = (2,-4) = \beta_1(-1,1) + \beta_2(4,3) = (-\beta_1 + 4\beta_2, \beta_1 + 3\beta_2) \\ & \Rightarrow \begin{array}{l} 2 = -\beta_1 + 4\beta_2 \\ -4 = \beta_1 + 3\beta_2 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \beta_1 = -22/7 \\ \beta_2 = -2/7 \end{array} \\ & \Rightarrow [u]_{B_1} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{7}\begin{pmatrix} -22 \\ -2 \end{pmatrix} \\ & \Rightarrow M_T \cdot [u]_{B_1} = \tfrac{1}{7}\begin{pmatrix} 11 & 33 \\ -6 & 31 \end{pmatrix} \cdot \tfrac{1}{7}\begin{pmatrix} -22 \\ -2 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{7}\begin{pmatrix} 44 \\ 10 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\frac{<|>}{<|>}$$

Determinemos el kernel de la transformación, un vector $u \in ker(T) \subseteq R^2$ si $T(u) = 0$, entonces

$$T(x, y) = (4x - y, 3x + 2y) = (0, 0)$$

esta ecuación produce el siguiente sistema de ecuaciones lineales homogéneo

$$\begin{array}{c} 4x - y = 0 \\ 3x + 2y = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} x = 0 \\ y = 0 \end{array}$$

por lo tanto

$$ker(T) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

es decir, el único vector en el kernel o núcleo es el vector cero, por lo tanto, $Dim(ker(T)) = 0$, entonces la transformación lineal es uno a uno.

Para la imagen de la transformación tenemos que, un vector $v \in im(T) \subseteq R^2$ si existe un vector $u \in R^2$ tal que $T(u) = v$, entonces

$$T(x, y) = (4x - y, 3x + 2y) \in im(T)$$

tenemos que encontrar un base para estos vectores, esta se obtiene factorizando al vector de la siguiente manera

$$(4x - y, 3x + 2y) = x(4, 3) + y(-1, 2)$$

así los vectores de la imagen son generados por el conjunto $\{(4, 3), (-1, 2)\}$, y además tenemos que

$$\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 11 \neq 0$$

por lo que el conjunto también es linealmente independiente, entonces los vectores $\{(4, 3), (-1, 2)\}$ son una base para la imagen de la transformación lineal. De esta forma tenemos que $Dim(im(T)) = 2 = Dim(R^2)$, lo cual implica que la transformación es sobre.

Recordemos que se debe satisfacer la siguiente relación

$$\begin{aligned} & Dim(ker(T)) + Dim(im(T)) = Dim(R^2) \\ & \Rightarrow 0 + 2 = 2 \end{aligned}$$

$$\frac{<|>}{<|>}$$

Problema IV.11 Sea $T : P_2 \to P_2$ una transformación lineal definida por

$$T\left(p(x)\right) = x^2 \frac{d^2}{dx^2} p(x) + 2x \frac{d}{dx} p(x)$$

a) Verifique la transformación es lineal.

b) Si $B_1 = \left\{2, x+1, 2x^2-1\right\}$ y $B_2 = \left\{-1, x-1, x^2-x+1\right\}$ son bases de P_2, determine la matriz asociada a la transformación lineal respecto a estas bases.

Solución: a) Sean $p(x)$, $q(x) \in P_3$ donde $p(x) = a_1x^2 + b_1x + c_1$ y $q(x) = a_2x^2 + b_2x + c_2$, y sea $\alpha \in R$ un escalar, entonces

$$\begin{aligned}
T\left(p(x) + q(x)\right) &= T\left((a_1x^2 + b_1x + c_1) + (a_2x^2 + b_2x + c_2)\right) \\
&= T\left((a_1 + a_2)x^2 + (b_1 + b_2)x + (c_1 + c_2)\right) \\
&= x^2(2(a_1 + a_2)) + 2x(2(a_1 + a_2)x + (b_1 + b_2)) \\
&= 2(a_1 + a_2)x^2 + 4(a_1 + a_2)x^2 + 2(b_1 + b_2)x
\end{aligned}$$

por otra parte

$$\begin{aligned}
T\left(p(x)\right) + T\left(q(x)\right) &= T\left(a_1x^2 + b_1x + c_1\right) + T\left(a_2x^2 + b_2x + c_2\right) \\
&= (x^2(2a_1) + 2x(2a_1x + b_1)) + (x^2(2a_2) + 2x(2a_2x + b_2)) \\
&= 2(a_1 + a_2)x^2 + 4(a_1 + a_2)x^2 + 2(b_1 + b_2)x
\end{aligned}$$

de donde

$$T\left(p(x) + q(x)\right) = T\left(p(x)\right) + T\left(q(x)\right)$$

También tenemos que

$$\begin{aligned}
T\left(\alpha p(x)\right) &= T\left(\alpha(a_1x^2 + b_1x + c_1)\right) = T\left(\alpha a_1x^2 + \alpha b_1x + \alpha c_1\right) \\
&= (x^2(2\alpha a_1) + 2x(2\alpha a_1x + \alpha b_1)) \\
&= 2\alpha a_1x^2 + 4\alpha a_1x^2 + 2\alpha b_1x
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\alpha T\left(p(x)\right) &= \alpha T\left(a_1x^2 + b_1x + c_1\right) = \alpha(x^2(2a_1) + 2x(2a_1x + b_1)) \\
&= 2\alpha a_1x^2 + 4\alpha a_1x^2 + 2\alpha b_1x
\end{aligned}$$

entonces

$$T\left(\alpha p(x)\right) = \alpha T\left(p(x)\right)$$

Por lo tanto la transfromación es lineal.

$$\frac{<|>}{<|>}$$

b) Para obtener la matriz de la transformación, primero transformamos los vectores de la base B_1

$$\begin{aligned}
T(2) &= x^2\frac{d^2}{dx^2}(2)+2x\frac{d}{dx}(2)=0\\
T(x+1) &= x^2\frac{d^2}{dx^2}(x+1)+2x\frac{d}{dx}(x+1)=2x\\
T(2x^2-1) &= x^2\frac{d^2}{dx^2}(2x^2-1)+2x\frac{d}{dx}(2x^2-1)=12x^2
\end{aligned}$$

ahora escribimos estos vectores en términos de la base

$$B_2T(2)=0=a_{11}(-1)+a_{21}(x-1)+a_{31}(x^2-x+1)=(-a_{11}-a_{21}+a_{31})+(a_{21}-a_{31})x+a_{31}x^2$$

de donde

$$\begin{array}{lcl}
-a_{11}-a_{21}+a_{31}=0 & & a_{11}=0\\
a_{21}-a_{31}=0 & \Rightarrow & a_{21}=0\\
a_{31}=0 & & a_{31}=0
\end{array}$$

tambien

$$T(x+1)=2x=a_{12}(-1)+a_{22}(x-1)+a_{32}(x^2-x+1)=(-a_{12}-a_{22}+a_{32})+(a_{22}-a_{32})x+a_{32}x^2$$

así

$$\begin{array}{lcl}
-a_{12}-a_{22}+a_{32}=0 & & a_{12}=-2\\
a_{22}-a_{32}=2 & \Rightarrow & a_{22}=2\\
a_{32}=0 & & a_{32}=0
\end{array}$$

finalmente

$$T(2x^2-1)=12x^2=a_{13}(-1)+a_{23}(x-1)+a_{33}(x^2-x+1)=(-a_{13}-a_{23}+a_{33})+(a_{23}-a_{33})x+a_{33}x^2$$

resultando

$$\begin{array}{lcl}
-a_{13}-a_{23}+a_{33}=0 & & a_{12}=0\\
a_{23}-a_{33}=0 & \Rightarrow & a_{22}=12\\
a_{33}=12 & & a_{32}=12
\end{array}$$

Por lo tanto, la matriz asociada a la transformación lineal resulta ser

$$M_T=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0\\ 0 & 2 & 12\\ 0 & 0 & 12\end{pmatrix}$$

$$\frac{<|>}{<|>}$$

Otra manera de encontrar a M_T es, construir una matriz doble, en una matriz colocamos a los vectores de la base B_2 como columnas

$$-1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},\ x-1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ x^2 - x + 1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

y en la otra colocamos los vectores transformados de la base B_1,

$$T(2) = 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ T(x+1) = 2x = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},\ T(2x^2-1) = 12x^2 = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

luego convertimos la matriz que contiene a la base B_2 en la matriz identidad y la otra matriz será M_T, esto es, entonces

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) (R_1 \leftrightarrow R_3) \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 12 \end{array}\right) ((-1)R_1 \to R_1) \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 12 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c}(R_1 + R_3 \to R_1) \\ (R_2 + R_3 \to R_2)\end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 12 \end{array}\right) (R_1 - R_2 \to R_1) \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 12 \end{array}\right)$$

Por lo tanto,

$$M_T = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 12 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

$$\frac{<\,|\,>}{<\,|\,>}$$

Problema IV.12 Considere la siguiente transformación lineal $T : R^3 \to R^2$ dada por

$$T\,(x, y, z) = (x + y, 3x - z)$$

a) Sean $B_1 = \{(1, 1, 2),\ (-3, 0, 1),\ (2, 4, 3)\}$ y $B_2 = \{(4, 1)\,,\ (3, 1)\}$ bases de R^3 y R^2, respectivamente. Encontrar la representación matricial de T repsecto de las bases anteriores.
Verificar la relación $[T\,(u)]_{B_2} = M_T \cdot [u]_{B_1}$ para el vector $u = (-1, 2, -2)$.

b) Determinar la matriz asociada a la transformación respecto a las bases canónicas de R^3 y R^2.
Verificar la relación $[T\,(u)]_{B_2} = M_T \cdot [u]_{B_1}$ para el vector $u = (-1, 2, -2)$.

Solución: a) Para determinar la matriz asociada a la tranformación lineal seguimos el procedimiento siguiente, transformamos los vectores de la base B_1, y estos los escribirlos en términos de la base B_2, esto es,

$$\begin{aligned}
T(1, 1, 2) &= (2, 1) = a_{11}\,(4, 1) + a_{21}\ \ (3, 1) = (4a_{11} + 3a_{21}, a_{11} + a_{21}) \\
T(-3, 0, 1) &= (-3, -10) = a_{12}\,(4, 1) + a_{22}\ \ (3, 1) = (4a_{12} + 3a_{22}, a_{12} + a_{22}) \\
T(2, 4, 3) &= (6, 3) = a_{13}\,(4, 1) + a_{23}\ \ (3, 1) = (4a_{13} + 3a_{23}, a_{13} + a_{23})
\end{aligned}$$

con lo cual se generan los siguientes sistemas de ecuaciones lineales, con sus correspondientes soluciones,

$$\begin{array}{l} 2 = 4a_{11} + 3a_{21} \\ 1 = a_{11} + a_{21} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} a_{11} = -1 \\ a_{21} = 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} -3 = 4a_{12} + 3a_{22} \\ -10 = a_{12} + a_{22} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} a_{12} = 27 \\ a_{21} = -37 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 6 = 4a_{13} + 3a_{23} \\ 3 = a_{13} + a_{23} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} a_{13} = -3 \\ a_{23} = 6 \end{array}$$

Por lo tanto, la matriz de la transformación respecto a las bases B_1 y B_2 es,

$$M_T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 27 & -3 \\ 2 & -37 & 6 \end{pmatrix}$$

Verifiquemos que se cumple $[T\,(u)]_{B_2} = M_T \cdot [u]_{B_1}$ para el vector $u = (-1, 2, -2)$. Primero encontremos $T(u)$ en términos de la base B_2, esto es

$$\begin{aligned}
T(u) &= T(-1, 2, -2) = (1, -1) = \alpha_1\,(4, 1) + \alpha_2\,(3, 1) \\
&= (4\alpha_1 + 3\alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2) \\
&\Rightarrow \begin{array}{l} 1 = 4\alpha_1 + 3\alpha_2 \\ -1 = \alpha_1 + \alpha_2 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \alpha_1 = 4 \\ \alpha_2 = -5 \end{array}
\end{aligned}$$

$$[T\,(u)]_{B_2} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\frac{<|>}{<|>}$$

Ahora usemos la matriz M_T, es decir,

$$\begin{aligned} u = (-1,2,-2) &= \beta_1(1,1,2) + \beta_2\ (-3,0,1) + \beta_3\ (2,4,3) \\ &= (\beta_1 - 3\beta_2 + 2\beta_3, \beta_1 + 4\beta_3, 2\beta_1 + \beta_2 + 3\beta_3) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} -1 = \beta_1 - 3\beta_2 + 2\beta_3 \\ 2 = \beta_1 + 4\beta_3 \\ -2 = 2\beta_1 + \beta_2 + 3\beta_3 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \beta_1 = -50/17 \\ \beta_2 = 3/17 \\ \beta_3 = 21/17 \end{array}$$

$$\Rightarrow [u]_{B_1} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -50/17 \\ 3/17 \\ 21/17 \end{pmatrix}$$

entonces

$$M_T \cdot [u]_{B_1} = \begin{pmatrix} -1 & 27 & -3 \\ 2 & -37 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -50/17 \\ 3/17 \\ 21/17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}$$

b) Usando las bases canonicas de R^3 y R^2, $C_1 = \{(1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1)\}$ y $C_2 = \{(1,0),\ (0,1)\}$, respectivamente tenemos que, usando el procedimiento del inciso anterior,

$$\begin{aligned} T(1,0,0) &= (1,3) = a_{11}(1,0) + a_{21}(0,1) = (a_{11}, a_{21}) \\ T(0,1,0) &= (1,0) = a_{12}\,(1,0) + a_{22}\ \ (0,1) = (a_{12}, a_{22}) \\ T(0,0,1) &= (0,-1) = a_{13}\,(1,0) + a_{23}\ \ (0,1) = (a_{13}, a_{23}) \end{aligned}$$

observamos de forma inmediata que la matriz asociada a la transformación lineal respecto de las bases canónicas es

$$M_T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Para verificar la relación $[T\,(u)]_{B_2} = M_T \cdot [u]_{B_1}$ con el vector $u = (-1,2,-2)$, tenemos que

$$T(u) = T(-1,2,-2) = (1,-1) = \alpha_1(1,0) + \alpha_2(0,1) = (\alpha_1, \alpha_2)$$

$$\Rightarrow [T\,(u)]_{B_2} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

por otra parte

$$u = (-1,2,-2) = \beta_1(1,0,0) + \beta_2(0,1,0) + \beta_3(0,0,1) = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$$

$$\Rightarrow [u]_{B_1} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

de donde

$$M_T \cdot [u]_{B_1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{<|>}{<|>}$$

Problema IV.13 Sea $T : M_{22} \to M_{22}$ una transformación lineal definida como

$$T\left(A\right) = AM - MA$$

donde $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Determinar el kernel y la imagen de la transformación.

b) Encontrar la representación matricial de la transformación, respecto a la base canónica de M_{22}.

Solución: Primero tenemos que $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{22}$, entonces

$$\begin{aligned} T\left(A\right) = AM - MA &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ \Rightarrow T\left(A\right) &= \begin{pmatrix} a & 2a+3b \\ c & 2c+3d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ 3c & 3d \end{pmatrix} \\ \Rightarrow T\left(A\right) &= \begin{pmatrix} -2c & 2a+2b-2d \\ -2c & 2c \end{pmatrix} \end{aligned}$$

a) El kernel o núcleo se obtiene igulando la transformación con cero, esto es,

$$T\left(A\right) = \begin{pmatrix} -2c & 2a+2b-2d \\ -2c & 2c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} -2c = 0 \\ 2a+2b-2d = 0 \\ -2c = 0 \\ 2c = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} c = 0 \\ a = -b+d \end{array}$$

$$\begin{array}{l} b = \alpha \in R \\ d = \beta \in R \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} a = -\alpha + \beta \\ b = \alpha \\ c = 0 \\ d = \beta \end{array}$$

entonces tenemos que

$$ker(T) = \left\{ \begin{pmatrix} -\alpha+\beta & \alpha \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \middle| \alpha,\ \beta \in R \right\}$$

Una base para este conjunto se obtiene factorizando la matriz, es decir,

$$\begin{pmatrix} -\alpha+\beta & \alpha \\ 0 & \beta \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

El conjunto de matrices $\left\{ \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ además de generar al $ker(T)$ es linealmente independiente, por lo tanto es una base para el kernel o núcleo de la transformación. Así, $Dim(ker(T)) = 2$.

$$\frac{<|>}{<|>}$$

La imagen de la transformación la obtenemos factorizando las matrices $\begin{pmatrix} -2c & 2a+2b-2d \\ -2c & 2c \end{pmatrix}$, o bien

$$\begin{pmatrix} -2c & 2a+2b-2d \\ -2c & 2c \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

de manera que el conjunto $\left\{\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$ genera a la imagen de T, pero se puede observar directamente que, solo dos matrices de ese conjunto son linealmente independientes, así una base de la imegen es $\left\{\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\right\}$. Por lo tanto, $Dim(im(T)) = 2$.

Podemos verificar tambien que

$$Dim(ker(T)) + Dim(im(T)) = Dim(M_{22})$$

b) Tenemos la base canónica de M_{22}, $C_1 = C_2 = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$, transformamos estos vectores y los escribimos en términos de la misma base, esto es,

$$T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = a_{11}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{21}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{31}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + a_{41}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{31} & a_{41} \end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = a_{12}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{22}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{32}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + a_{42}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{32} & a_{42} \end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = a_{13}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{23}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{33}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + a_{43}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{13} & a_{23} \\ a_{33} & a_{43} \end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = a_{14}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{24}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{34}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + a_{44}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{14} & a_{24} \\ a_{34} & a_{44} \end{pmatrix}$$

de donde facilmente podemos encontrar los valores de los coeficientes, de manera que

$$M_T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{<\mid>}{<\mid>}$$

Problema VI.14 Considere la transfromación lineal $T : P_1 \to P_2$ definida como $T\left(p(x)\right) = x \cdot p(x) + p(0)$.

a) Determinar el kernel y la imagen de la transformación, y diga que dimensión tienen cada uno de ellos.
b) Encuentre la representación matricial de la transfromación respecto de las siguientes bases $B_1 = \{x+1, x-1\}$ y $B_2 = \left\{x^2+1, x-1, x+1\right\}$.
c) Verifique la relación $[T(u)]_{B_2} = M_T[u]_{B_1}$, donde $u = 3x-2$.

Solución: a) Tenemos que para el kernel o núcleo, igualamos la transfromación a cero, donde $p(x) = ax+b \in P_1$, entonces

$$T\left(p(x)\right) = x \cdot p(x) + p(0) \;\Rightarrow\; T\left(ax+b\right) = x(ax+b) + b = ax^2 + bx + b = 0x^2 + 0x + 0 \;\Rightarrow\; \begin{array}{l} a=0 \\ b=0 \end{array}$$

por lo tanto

$$ker(T) = \{0x+0\}$$

esto es, el único vector del kernel es el vector (polinomio) cero, así que $Dim(ker(T)) = 0$.

Para la imagen tenemos que

$$T\left(p(x)\right) = x \cdot p(x) + p(0) \;\Rightarrow\; T\left(ax+b\right) = x(ax+b) + b = ax^2 + bx + b$$

de donde factorizamos

$$ax^2 + bx + b = ax^2 + b(x+1)$$

entonces los vectores $\left\{x^2, x+1\right\}$ generan a la imagen de la transformación y ademas son linealmente independientes, por lo tanto, son una base de la imagen, de est manera $Dim(im(T)) = 2$.
Donde se satisface la relación

$$Dim(ker(T)) + Dim(im(T)) = Dim(P_1)$$

b) Transformamos los vectores de la base B_1 y los escribimos como combinación lineal de los vectores de la base B_2, esto es,

$$\begin{aligned} T(x+1) &= x^2 + x + 1 = a_{11}(x^2+1) + a_{21}(x-1) + a_{31}(x+1) \\ &= (a_{11} - a_{21} + a_{31}) + (a_{21} + a_{31})x + a_{11}x^2 \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{array}{lcl} a_{11} - a_{21} + a_{31} = 1 & & a_{11} = 1 \\ a_{21} + a_{31} = 1 & \Rightarrow & a_{21} = 1/2 \\ a_{11} = 1 & & a_{31} = 1/2 \end{array}$$

igualmente para

$$\begin{aligned} T(x-1) &= x^2 - x - 1 = a_{12}(x^2+1) + a_{22}(x-1) + a_{32}(x+1) \\ &= (a_{12} - a_{22} + a_{32}) + (a_{22} + a_{32})x + a_{12}x^2 \end{aligned}$$

resultando

$$\begin{array}{lcl} a_{12} - a_{22} + a_{32} = -1 & & a_{12} = 1 \\ a_{22} + a_{32} = -1 & \Rightarrow & a_{22} = 1/2 \\ a_{12} = 1 & & a_{32} = -3/2 \end{array}$$

$$\frac{<\,|\,>}{<\,|\,>}$$

Por lo tanto la matriz asociada a la transfromación esta dada por

$$M_T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -3/2 \end{pmatrix}$$

c) Para el vector $u = 3x - 2$ tenemos que

$$\begin{aligned} T(u) &= T(3x-2) = 3x^2 - 2x - 2 = \alpha_1(x^2+1) + \alpha_2(x-1) + \alpha_3(x+1) \\ &= (\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3) + (\alpha_2 + \alpha_3)x + \alpha_1 x^2 \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{array}{l} \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = -2 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = -2 \\ \alpha_1 = 3 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \alpha_1 = 3 \\ \alpha_2 = 3/2 \\ \alpha_3 = -7/2 \end{array} \Rightarrow [T(u)]_{B_2} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3/2 \\ -7/2 \end{pmatrix}$$

Por otra parte tenemos que

$$u = 3x - 2 = \beta_1(x+1) + \beta_2(x-1) = (\beta_1 - \beta_2) + (\beta_1 + \beta_2)x$$

de donde obtenemos

$$\begin{array}{l} \beta_1 - \beta_2 = -2 \\ \beta_1 + \beta_2 = 3 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \beta_1 = 1/2 \\ \beta_2 = 5/2 \end{array} \Rightarrow [u]_{B_1} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 5/2 \end{pmatrix}$$

entonces

$$M_T \cdot [u]_{B_1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -3/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 5/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3/2 \\ -7/2 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, se satisface la relación

$$[T(u)]_{B_2} = M_T \cdot [u]_{B_1}$$

$$\frac{<|>}{<|>}$$

Problema IV.15 Considere la transfromación lineal $T : P_3 \to M_{22}$ definida como

$$T\left(a+bx+cx^2+dx^3\right) = \begin{pmatrix} a+c+2d & 2a+b+c+4d \\ 2a+b+c+3d & a+b+2d \end{pmatrix}$$

a) Determinar el kernel y la imagen de la transformación.
b) Encontrar la representación matricial de la transformación, respecto a las base canónicas de P_3 y de M_{22}.

Solución: a) Para obtener el kernel tenemos que

$$T\left(a+bx+cx^2+dx^3\right) = \begin{pmatrix} a+c+2d & 2a+b+c+4d \\ 2a+b+c+3d & a+b+2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

de donde resulta el sistema de ecuaciones lineales homegéneo siguiente

$$\begin{array}{lcl} a+c+2d=0 & & a+c+2d=0 \\ 2a+b+c+4d=0 & (R_3-R_2\to R_3) & 2a+b+c+4d=0 \\ 2a+b+c+3d=0 & (R_4-R_1\to R_4) & -d=0 \\ a+b+2d=0 & & b-c=0 \end{array}$$

$$(R_2-2R_1\to R_2)\quad \begin{array}{l} a+c+2d=0 \\ b-c=0 \\ -d=0 \\ b-c=0 \end{array} \quad (R_4-R_2\to R_4)\quad \begin{array}{l} a+c+2d=0 \\ b-c=0 \\ -d=0 \end{array} \quad \Rightarrow \begin{array}{l} a=-c \\ b=c \\ d=0 \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} a=-\alpha \\ b=\alpha \\ c=\alpha \\ d=0 \end{array} \quad \text{donde } \alpha\in R \text{, es un parámetro libre}$$

por lo tanto,

$$ker(T) = \left\{-\alpha+\alpha x+\alpha x^2 \middle|\, \alpha\in R\right\}$$

si factorizamos los polinomios que se encuentran en el kernel o núcleo tenemos:

$$-\alpha+\alpha x+\alpha x^2 = \alpha(-1+x+x^2)$$

entonces $\left\{-1+x+x^2\right\}$ es una base para el kernel de la transfromación, así

$$Dim(ker(T)) = 1$$

Ahora la imagen la obtenemos de la forma siguiente

$$\begin{aligned} T\left(a+bx+cx^2+dx^3\right) &= \begin{pmatrix} a+c+2d & 2a+b+c+4d \\ 2a+b+c+3d & a+b+2d \end{pmatrix} \\ &= a\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

de donde observamos que el conjunto $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\right\}$ genera a la imagen de la transfromación lineal, pero no todas estas matrices son linealmente independientes ya que $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, entonces

$$ker(T) = \left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\right\} \Rightarrow Dim(im(T)) = 3$$

$$\frac{<|>}{<|>}$$

Podemos observar que se satisface la relación

$$Dim(ker(T)) + Dim(im(T)) = Dim(P_3)$$

b) Consideremos la base canónica del espacio vectorial P_3, $C_1 = \left\{1, x, x^2, x^3\right\}$ y la base canónica del espacio vectorial M_{22}, $C_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$. Transformamos la base C_1, y estos vectores los escribimos en términos de la base C_2.

$$T(1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = a_{11}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{21}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{31}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + a_{41}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{31} & a_{41} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} a_{11} = 1 \\ a_{21} = 2 \\ a_{31} = 2 \\ a_{41} = 1 \end{array}$$

$$T(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = a_{12}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{22}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{32}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + a_{42}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{32} & a_{42} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} a_{12} = 0 \\ a_{22} = 1 \\ a_{32} = 1 \\ a_{42} = 1 \end{array}$$

$$T(x^2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = a_{13}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{23}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{33}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + a_{43}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{13} & a_{23} \\ a_{33} & a_{43} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} a_{13} = 1 \\ a_{23} = 1 \\ a_{33} = 1 \\ a_{43} = 0 \end{array}$$

$$T(x^3) = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = a_{14}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{24}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{34}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + a_{44}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{14} & a_{24} \\ a_{34} & a_{44} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} a_{14} = 2 \\ a_{24} = 4 \\ a_{34} = 3 \\ a_{44} = 2 \end{array}$$

Por lo tanto la matriz asociada a la transfromación lineal, respecto de la bases canónicas está dada por

$$M_T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\frac{<|>}{<|>}$$

Problema V.1 Para la siguiente matriz, calcule sus valores característicos, sus vectores característicos y diagonalize la matriz con los resultados anteriores,

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución: Primero encontramos el polinomio característico para poder determinar los valores característicos de la matriz, esto es,

$$p(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \quad (C_1 + C_2 \to C_1) \;\; p(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ 2-\lambda & 1-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$(C_1/(2-\lambda) \to C_1) \;\; p(\lambda) = (2-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$(R_2 - R_1 \to R_2) \;\; p(\lambda) = (2-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2(1-\lambda)$$

Por lo tanto, los valores característicos de la matriz A son: $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ y $\lambda_3 = 1$.

Ahora sustituimos los valores característicos anteriores para encontrar los vectores característicos asociados a cada uno de ellos, de manera que,

Para $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ tenemos

$$(A - \lambda_{1,2} I)X_{1,2} = 0 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3-2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1-2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1-2 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{matrix}(R_2 - R_1 \to R_2) \\ (R_3 - R_1 \to R_3)\end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \;\; R_1 \Rightarrow x = y + z \;\Rightarrow\; \begin{matrix} x = \alpha + \beta \\ y = \alpha \in R \\ z = \beta \in R \end{matrix}$$

es decir, la solución de la ecuación característica esta dado por

$$X_{1,2} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + \beta \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, los vectores característicos asociados a λ_1 y λ_2 son $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Para $\lambda_3 = 1$ tenemos

$$(A - \lambda_3 I)X_3 = 0 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3-1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1-1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1-1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$(R_1 \leftrightarrow R_2) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix}(R_2 - 2R_1 \to R_2) \\ (R_3 - R_1 \to R_3)\end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$(R_3 - R_2 \to R_3) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} R_1 \Rightarrow x = z \\ R_2 \Rightarrow y = z \end{matrix} \;\Rightarrow\; \begin{matrix} x = \alpha \\ y = \alpha \\ z = \alpha \in R \end{matrix}$$

$$\frac{<|>}{<|>}$$

Es decir, la solución de la ecuación característica ahora esta dada por

$$X_3 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ \alpha \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, el vector característico asociados a λ_3 es $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Como los vectores característicos asociados a la matriz A, dados por $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, forman un conjunto de vectores linealmente independientes, entonces significa que la matriz A es diagonalizable. La matriz que diagonaliza a la matriz A, es C cuyas columnas son los vectores característicos encontrados anteriormente, entonces

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Finalmente diagonalizamos

$$\begin{aligned} D &= C^{-1}AC = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Los coeficientes de la matriz diagonal son los valores propios de la matriz A, como se esperaba.

El orden en el que aparecen los valores propios en la matriz diagonal D, depende del orden en el que coloquemos los vectores propios en la matriz C, esto es, la posición del valor propio corresponde a la columna del vector propio correspondiente. Por ejemplo, si

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

entonces

$$D = C^{-1}AC = \begin{pmatrix} \lambda_3 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{<|>}{<|>}$$

Problema V.2 Diagonalize ortogonalmente la siguiente matriz simétrica,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Solución: Primeramente determinemos los valores característicos de la matriz usando el polinomio característico, es decir,

$$p(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & -2 \\ 0 & -2-\lambda & 0 \\ -2 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(-2-\lambda)(3-\lambda) + 2(-2)(2-\lambda)$$

$$p(\lambda) = (\lambda+2)\left[\lambda(3-\lambda) + 2(2)\right] = (\lambda+2)(-\lambda^2+3\lambda+4) = -(\lambda+2)(\lambda^2-3\lambda-4)$$

$$p(\lambda) = -(\lambda+2)(\lambda+1)(\lambda-4)$$

Por lo tanto, los valores característicos, $p(\lambda) = 0$, de la matriz A son: $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -1$ y $\lambda_3 = 4$.

Ahora sustituimos los valores característicos anteriores para encontrar los vectores característicos asociados a cada uno de ellos, de manera que,

Para $\lambda_1 = -2$ tenemos

$$(A - \lambda_1 I)X_1 = 0 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 5 & 0 \end{array}\right) (R_3 + R_1 \rightarrow R_3) \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c}(R_1/3 \rightarrow R_3) \\ (R_1/2 \rightarrow R_1)\end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) (R_1 + R_3 \rightarrow R_1) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_1 \Rightarrow x = 0 \\ R_2 \Rightarrow y = \alpha \in R \\ R_3 \Rightarrow z = 0 \end{array}$$

entonces podemos escribir la solución de la ecuación característica como

$$X_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, el vector característico asociados a λ_1 es $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ o cualquier multiplo de este.

Para $\lambda_2 = -1$ tenemos

$$(A - \lambda_2 I)X_2 = 0 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right) (R_3 + 2R_1 \rightarrow R_3) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} R_1 \Rightarrow x - 2z = 0 \\ R_2 \Rightarrow y = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x = 2\alpha \\ y = 0 \\ z = \alpha \in R \end{array}$$

entonces la solución de la ecuación característica la podemos escribir como

$$X_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{<|>}{<|>}$$

Por lo tanto, el vector característico asociados a λ_2 es $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Para $\lambda_3 = 4$ tenemos

$$(A - \lambda_3 I)X_3 = 0 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -4 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} (R_1/(-4) \to R_1) \\ (R_2/(-6) \to R_2) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

$$(R_3 + 2R_1 \to R_3) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} R_1 \Rightarrow x + z/2 = 0 \\ R_2 \Rightarrow y = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x = -\alpha/2 \\ y = 0 \\ z = \alpha \in R \end{array}$$

así, la solución de la ecuación característica la podemos escribir como

$$X_3 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha/2 \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, el vector característico asociados a λ_3 es, para $\alpha = 2$, $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$.

De esta manera tenemos el conjunto de vectores ortogonales $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$, ahora normalizando estos vectores obtenemos el siguiente conjunto $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} \\ 0 \\ 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/\sqrt{5} \\ 0 \\ 2/\sqrt{5} \end{pmatrix} \right\}$, los cuales son vectores propios ortonormales de la matriz A, con los cuales construimos la matriz P, que tiene la propiedad de que $P^{-1} = P^T$, de esta manera

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix} \Rightarrow P^{-1} = P^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2/\sqrt{5} & 0 & 1/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} & 0 & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

Finalmente diagonalizamos la matriz que diagonaliza a la matriz A como sigue,

$$\begin{aligned} D &= P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2/\sqrt{5} & 0 & 1/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} & 0 & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -2/\sqrt{5} & 0 & -1/\sqrt{5} \\ -4/\sqrt{5} & 0 & 8/\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Los coeficientes de la matriz diagonal son los valores propios de la matriz A, como se esperaba.

$$\frac{<|>}{<|>}$$

Problema V.3 Para la siguiente matriz A, determine sus valores y vectores propios o característicos, y determine la matriz que diagonaliza a la matriz A,

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -2 & -4 \\ 3 & 0 & -2 \\ 6 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

Solución: Tenemos el polinomio característico de la matriz A, de donde calculamos los valores característicos de la matriz, esto es,

$$p(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 7-\lambda & -2 & -4 \\ 3 & -\lambda & -2 \\ 6 & -2 & -3-\lambda \end{vmatrix} \quad (R_3 - R_1 \to R_3) \quad p(\lambda) = \begin{vmatrix} 7-\lambda & -2 & -4 \\ 3 & -\lambda & -2 \\ -1+\lambda & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$(R_3/(-1+\lambda) \to R_3) \quad p(\lambda) = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 7-\lambda & -2 & -4 \\ 3 & -\lambda & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$(C_1 + C_3 \to C_1) \quad p(\lambda) = -(\lambda - 1)\begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 & -4 \\ 1 & -\lambda & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -(\lambda-1)(\lambda^2 - 3\lambda + 2)$$

$$p(\lambda) = -(\lambda-1)(\lambda-1)(\lambda-2)$$

las raices de este polinomio $p(\lambda) = 0$, son los valores característicos de la matriz A, de manera que: $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ y $\lambda_3 = 2$.

Sustituimos los valores característicos anteriores en la ecuación homogénea $(A - \lambda_i I)X_i = 0$, para encontrar los vectores característicos asociados a cada volor propio, entonces,

Para $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ tenemos

$$(A - \lambda_{1,2} I)X_{1,2} = 0 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 7-1 & -2 & -4 & 0 \\ 3 & -1 & -2 & 0 \\ 6 & -2 & -3-1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & -2 & -4 & 0 \\ 3 & -1 & -2 & 0 \\ 6 & -2 & -4 & 0 \end{array}\right)$$

$$(R_1/2 \to R_1) \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & -2 & 0 \\ 6 & -2 & -4 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} (R_2 - R_1 \to R_2) \\ (R_3 - 2R_1 \to R_3) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$(R_1/3 \to R_1) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/3 & -2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow x = y/3 + 2z/3 \text{ si } \begin{array}{c} y = \alpha \\ z = \beta \end{array} \text{ con } \alpha, \beta \in R$$

la solución de la ecuación característica esta dado por

$$X_{1,2} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha/3 + 2\beta/3 \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2/3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\alpha}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\beta}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, los vectores característicos asociados a λ_1 y λ_2 son $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$.

$$\frac{<|>}{<|>}$$

Para $\lambda_3 = 2$ tenemos

$$(A-\lambda_3 I)X_3 = 0 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 7-2 & -2 & -4 & 0 \\ 3 & -2 & -2 & 0 \\ 6 & -2 & -3-2 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -2 & -4 & 0 \\ 3 & -2 & -2 & 0 \\ 6 & -2 & -5 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l}(R_1 - R_2 \to R_1)\\(R_3 - R_2 \to R_3)\end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -2 & 0 \\ 3 & -2 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right) (R_1/2 \to R_1) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l}(R_2 - 3R_1 \to R_2)\\(R_3 - 3R_1 \to R_3)\end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) (R_2/(-2) \to R_2) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l}R_1 \Rightarrow x = z\\ R_2 \Rightarrow y = z/2\end{array} \text{ donde } z = \alpha \in R$$

es decir, la solución de la ecuación característica ahora esta dada por

$$X_3 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha/2 \\ \alpha \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\alpha}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, el vector característico de la matriz A asociado a λ_3 es $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$.

Tenemos que los vectores característicos asociados a la matriz A, $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$, forman un conjunto de vectores linealmente independientes, por lo que la matriz A se puede diagonalizar mediante una matriz C, cuyas columnas son precisamente los vectores característicos encontrados anteriormente, entonces

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow C^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2/3 & 2/3 \\ -2 & 2/3 & 5/3 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -6 & 2 & 5 \\ 9 & -3 & -6 \end{pmatrix}$$

Verificamos la relación

$$\begin{aligned} D &= C^{-1}AC = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -6 & 2 & 5 \\ 9 & -3 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & -2 & -4 \\ 3 & 0 & -2 \\ 6 & -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -6 & 2 & 5 \\ 9 & -3 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\frac{<|>}{<|>}$$

Problema V.4 Si A es una matriz simetrica de tamaño 3×3, diagonalizela ortoganalmente

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Solución: Determinemos los valores característicos de la matriz usando el polinomio característico, es decir,

$$p(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & -1-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 + 3\lambda^2 - 9\lambda - 27$$
$$p(\lambda) = (\lambda+3)(\lambda+3)(\lambda-3)$$

Los valores característicos de la matriz A son la raices de la ecuación $p(\lambda) = 0$, de modo que: $\lambda_1 = \lambda_2 = -3$ y $\lambda_3 = 3$.

Ahora sustituimos los valores característicos anteriores en la ecuación $(A - \lambda_i I)X_i = 0$, para encontrar los vectores característicos de A, para cada valor propio, entonces

Para $\lambda_1 = \lambda_2 = -3$ tenemos

$$(A - \lambda_{1,2} I)X_{1,2} = 0 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1+3 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & -1+3 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -1+3 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right)$$
$$(R_1/2 \to R_1) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} (R_2 - 2R_1 \to R_2) \\ (R_3 - 2R_1 \to R_3) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$
$$\Rightarrow x = -y - z \quad \text{si } y = \alpha \text{ y } z = \beta \text{ donde } \alpha, \beta \in R$$

entonces podemos escribir la solución de la ecuación característica como

$$X_{1,2} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha - \beta \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, los vectores característicos asociados al valor propio $\lambda_{1,2} = -3$ son $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ o cualquier multiplo de este. Ahora ortonormalizemos a estos vectores usando el proceso de Gramm-Schmidt, esto es, sea $u_1 = (-1, 1, 0)$ y $u_2 = (-1, 0, 1)$ entonces

$$\begin{aligned} v_1 &= u_1 = (-1, 1, 0) \\ v_2 &= u_2 - \left(\frac{u_2 \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} \right) v_1 = (-1/2, -1/2, 1) \end{aligned}$$

donde los vectores v_1 y v_2 son ortogonales, esto es, $v_1 \cdot v_2 = (-1, 1, 0) \cdot (-1/2, -1/2, 1) = 0$, finalmente los normalizamos

$$\begin{aligned} w_1 &= \frac{v_1}{|v_1|} = (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0) \\ w_2 &= \frac{v_2}{|v_2|} = (-1/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6}) \end{aligned}$$

$$\frac{<|>}{<|>}$$

Para $\lambda_3 = 3$ tenemos

$$(A-\lambda_2 I)X_2 = 0 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1-3 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & -1-3 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -1-3 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} -4 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -4 & 0 \end{array}\right)$$

$$R_1/(-2) \to R_1 \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -4 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} (R_2 - R_1 \to R_2) \\ (R_3 - R_1 \to R_3) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

$$R_3 + R_2 \to R_3 \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) R_2/(-1) \to R_2 \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$R_1 + R_2 \to R_1 \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{c} x = y \\ y = z \end{array} \quad \text{si } z = \alpha \in R$$

entonces la solución de la ecuación característica la podemos escribir como

$$X_3 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ \alpha \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Así, el vector característico asociados a λ_3 es $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, normalizado tenemos que $\left\{ \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \right\}$.

De esta manera, tenemos el conjunto de vectores $\left\{ \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \right\}$, los cuales son vectores propios ortonormales de la matriz A, que usamos para construimos la matriz P, que tiene la propiedad de que $P^{-1} = P^T$, y que diaganaliza a A, esto es

$$P = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \Rightarrow P^{-1} = P^T = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Finalmente diagonalizamos la matriz que diagonaliza a la matriz A como sigue,

$$\begin{aligned} D &= P^{-1}AP = P^TAP = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/\sqrt{2} & 3/\sqrt{6} & 3/\sqrt{3} \\ -3/\sqrt{2} & 3/\sqrt{6} & 3/\sqrt{3} \\ 0 & -6/\sqrt{6} & 3/\sqrt{3} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\frac{<|>}{<|>}$$

Problema V.5 Identifique la sección cónica cuya ecuación es,

$$5x^2 - 2xy + 5y^2 = 4$$

Solución: La matriz simétrica asociada es esta ecuación tiene la forma siguiente

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

cuyo polinomio característico esta dado por el determinante

$$p(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -1 \\ -1 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)^2 - 1 = 24 - 10\lambda + \lambda^2$$

donde las raices de la ecuación $p(\lambda) = 24 - 10\lambda + \lambda^2 = 0$ son: $\lambda_1 = 4$ y $\lambda_2 = 6$, que son los valores propios de la matriz A.

Determinamos ahora los vectores propios ortonormales correspondientes,

Para $\lambda_1 = 4$ tenemos

$$(A - \lambda_1 I)X_1 = 0 \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \ (R_2 + R_1 \to R_2) \ \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$
$$R_1 \Rightarrow x = y \ \Rightarrow \ y = \alpha \in R$$

entonces podemos escribir la solución de la ecuación característica como

$$X_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, el vector característico ortonormal asociado a λ_1 es $\left\{ \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \right\}$ o cualquier multiplo de este.

Para $\lambda_2 = 6$ tenemos

$$(A - \lambda_2 I)X_2 = 0 \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \ (R_2 - R_1 \to R_2) \ \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$
$$R_1 \Rightarrow x = -y \ \Rightarrow \ y = \alpha \in R$$

de manera que podemos escribir la solución de la ecuación característica como

$$X_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha \\ \alpha \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Entonces, el vector característico ortonormal asociado a λ_2 es $\left\{ \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \right\}$ o cualquier multiplo de este.

La matriz ortonormal correspondiente es,

$$Q = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

de donde

$$|Q| = \begin{vmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{vmatrix} = 1/2 + 1/2 = 1$$

Por lo tanto, podemos escribir la forma cuadrática en términos de las nuevas coordenadas como sigue,

$$(x', y') \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 4 \ \Rightarrow \ (4x', 6y') \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 4\,(x')^2 + 6(y')^2 = 4$$

reescribiendo la ecuación anterior nos resulta,

$$4\,(x')^2 + 6(y')^2 = 4 \ \Rightarrow \ \left(\frac{4}{4}\right)(x')^2 + \left(\frac{6}{4}\right)(y')^2 = 1$$

o bien

$$\frac{(x')^2}{1} + \frac{(y')^2}{4/6} = 1$$

la cual corresponde a la ecuación de una elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

cuyos radios son, el menor $a = 1$ y el mayor $b = \sqrt{4/6}$.

$$\frac{<|>}{<|>}$$

Problema V.6 Considere la siguiente ecuación cudrática,

$$x^2 + y^2 + 2z^2 + 2xy = 2$$

determinar la sección cónica correspondiente.

Solución: La matriz simétrica correspondiente a la ecuación anterior tiene la forma,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

el polinomio característico asociado a esta matriz, es el determinante,

$$p(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda^3 - 4\lambda^2 + 4\lambda) = -\lambda(\lambda-2)^2$$

donde las raices de la ecuación $p(\lambda) = -\lambda(\lambda-2)^2 = 0$ son: $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_{2,3} = 2$, que corresponden a los valores propios de la matriz A.

Obtenemos ahora los correspondientes vectores propios o característicos

Para $\lambda_1 = 0$ tenemos

$$(A - \lambda_1 I)X_1 = 0 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} (R_2 - R_1 \to R_2) \\ (R_3/2 \to R_3) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$R_1 \Rightarrow x = -y$$
$$R_3 \Rightarrow z = 0$$

entonces podemos escribir la solución de la ecuación característica como

$$X_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ -\alpha \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, el vector característico asociado al valor propio $\lambda_1 = 0$ es $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ o cualquier multiplo de este.

Para $\lambda_{2,3} = 2$ tenemos

$$(A - \lambda_{2,3} I)X_{2,3} = 0 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) (R_2 + R_1 \to R_2) \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$R_1 \Rightarrow x = y = \alpha \in R$$
$$R_2 \Rightarrow z = \beta \in R$$

entonces podemos escribir la solución de la ecuación característica como

$$X_{2,3} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, los vectores característico asociado al valor propio $\lambda_{2,3} = 2$ son $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ o cualquier multiplo de estos.

Aplicamos el método de Gramm-Schmidt al conjunto de vectores $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, para obtener un conjunto de vectores ortonormales, los cuales resultan ser $\left\{ \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. Ahora con estos vectores construímos la matriz,

$$Q = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

de donde

$$|Q| = \begin{vmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1)(1/2 + 1/2) = 1$$

Por lo tanto, podemos escribir la forma cuadrática en términos de las nuevas coordenadas como sigue,

$$(x', y', z') \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = 2 \;\Rightarrow\; (0x', 2y', 2z') \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = 0(x')^2 + 2(y')^2 + 2(z')^2 = 2$$

si reescribimos la ecuación anterior tenemos,

$$0(x')^2 + 2(y')^2 + 2(z')^2 = 2 \;\Rightarrow\; 0(x')^2 + (y')^2 + (z')^2 = 1$$

ecuación que corresponde a un elipsoide.

$$\frac{<|>}{<|>}$$

Problema V.7 Reescriba la siguiente ecuación en términos de nuevas variables, de tal manera que solo esten presentes los términos cuadráticos,

$$3x^2 + 4xy + 2y^2 + 4xz + 4z^2 = 0$$

Solución: La matriz simétrica correspondiente a la ecuación anterior esta dada por,

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

el polinomio característico asociado a esta matriz, es el determinante,

$$p(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 2-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda^2 - 9\lambda + 18) = \lambda(\lambda - 3)(\lambda - 6)$$

donde las raices de la ecuación $p(\lambda) = \lambda(\lambda - 6)(\lambda - 3) = 0$ son: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 3$ y $\lambda_3 = 6$, que corresponden a los valores propios de la matriz A.

Los vectores propios o característicos asociados a estos valores propios se obtienen resolviendo los siguientes sistemas de ecuaciones lineales,

Para $\lambda_1 = 0$ tenemos

$$(A - \lambda_1 I)X_1 = 0 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$R_1 \Rightarrow x = -2z$$
$$R_2 \Rightarrow y = 2z$$

entonces podemos escribir la solución de la ecuación característica como

$$X_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\alpha \\ 2\alpha \\ \alpha \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, el vector característico asociado al valor propio $\lambda_1 = 0$ es $\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Para $\lambda_2 = 3$ tenemos

$$(A - \lambda_2 I)X_2 = 0 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$R_1 \Rightarrow x = -z/2$$
$$R_2 \Rightarrow y = -z$$

entonces podemos escribir la solución de la ecuación característica como

$$X_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha/2 \\ -\alpha \\ \alpha \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, el vector característico asociado al valor propio $\lambda_2 = 3$ es $\left\{ \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Para $\lambda_3 = 6$ tenemos

$$(A - \lambda_3 I)X_3 = 0 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$R_1 \Rightarrow x = z$$
$$R_2 \Rightarrow y = z/2$$

entonces podemos escribir la solución de la ecuación característica como

$$X_3 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha/2 \\ \alpha \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, el vector característico asociado al valor propio $\lambda_3 = 6$ es $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Ortonormalizamos el conjunto de vectores $\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ mediante el proceso de Gramm-Schmidt, con lo cual obtenemos el nuevo conjunto $\left\{ \begin{pmatrix} -2/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/3 \\ -2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} \right\}$, con los cuales formamos la matriz,

$$Q = \begin{pmatrix} -2/3 & -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

cuyo determinate es

$$|Q| = \begin{vmatrix} -2/3 & -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 & 2/3 \end{vmatrix} = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

..

Por lo tanto, la ecuación en términos de las nuevas coordenadas se escribe como,

$$(x', y', z') \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow (0x', 3y', 6z') \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = 0(x')^2 + 3(y')^2 + 6(z')^2 = 0$$

$$\frac{<|>}{<|>}$$

BIBLIOGRAFÍA

ÁLGEBRA LINEAL, Grossman Stanley I, Mc Graw Hill, Quinta Edición 1996.
ÁLGEBRA LINEAL CON APLICACIONES Y MATLAB, Bernard Kolman, Prentice Hall, Sexta Edición 1999.
ÁLGEBRA LINEAL, Kenneth Hoffman y Ray Kunze, Prentice Hall, Segunda Edición 1973.
ÁLGEBRA LINEAL, Rafael Bru, Joan-Josep Climent, Josep Mas y Ana Urbano, Alfa Omega, 2001.
ÁLGEBRA LINEAL UNA INRODUCCIÓN MODERNA, David Pole, Thomson, 2004.